Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat11liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XI. — ANNÉE 1846.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1846

20767
c.

TABLE DES MATIÈRES,

TOME XI.

Pages.

Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde; par M. *Michael Roberts*. 1

Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré; par M. *Chasles*. 5

Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré; par *J. Liouville*. 21

Application des transcendantes elliptiques aux polygones sphériques, qui sont inscrits à un petit cercle de la sphère, et circonscrits à un autre petit cercle, simultanément; par M. *Richelot*. 25

Sur le nombre des divisions à effectuer pour obtenir le plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers; par M. *Athanase Dupré*. 41

Mémoire de géométrie (troisième partie); par M. *Auguste Miquel*. 65

Démonstration d'une formule de M. Dirichlet; remarques sur quelques expressions du nombre π; par M. *Lebesgue*... 76

Note sur l'évaluation de l'aire de la surface nommée, dans l'optique, surface d'élasticité; par M. *William Roberts*. 81

Sur un théorème de M. Joachimsthal, relatif aux lignes de courbure planes; par *J. Liouville*. 87

Théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de la première classe; par M. *J.-A. Serret*. 89

Sur l'équation $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{(e^t + e^{-t})^2}$; par M. *Besge*. 96

Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite, par M. *C.-G.-J. Jacobi*. 97

Construction des caustiques par réflexion sur les courbes planes, le point lumineux étant dans le plan de la courbe; par M. *J.-H. Grillet*. 104

Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales; — Et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces; par M. *Chasles*. 105

Notes sur quelques questions de priorité, au sujet d'un Mémoire de M. Mac Cullagh; par M. *Chasles*. 120

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville, par M. *William Roberts*. 124

Remarques sur les systèmes de droites dans l'espace; par M. *J. Bouquet*. 125

Pages.

Note sur le théorème de M. Cauchy relatif au développement des fonctions en series; par M. *Ernest Lamarle*. 129

Expression numérique des intégrales définies qui se présentent, quand on cherche les termes généraux du développement des coordonnées d'une planète, dans son mouvement elliptique; par M. *F. Lefort*. 142

Note sur les centres des lignes et des surfaces algébriques; par M. *Breton* (*de Champ*). 153

Sur l'évaluation de quelques intégrales définies, par des fonctions elliptiques; par M. *William Roberts*. 157

Note sur l'attraction; par M. *C. Briot*. 174

Sur l'interpolation; par M. *E. Brassinne*. 177

Sur les trajectoires qui coupent, sous un angle constant, les courbes méridiennes des surfaces de révolution; par M. *l'abbé Aoust*. 184

Note sur les équations d'équilibre d'un système de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace; par M. *R. Lobatto*. 193

Sur les intégrales définies

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}.x^{m-1}\,dx}{1+x^2},\quad \int_0^\infty \frac{\cos\beta x.x^{m-1}\,dx}{1+x^2},\quad \int_0^\infty \frac{\sin\beta x.x^{m-1}\,dx}{1+x^2};$$

par M. *A.-F. Svanberg*. 197

Note sur quelques intégrales multiples; par M. *William Roberts*. 201

Démonstration d'un théorème de Poisson; par M. *William Roberts*. 210

Note sur un problème de mécanique; par M. *E. Catalan*. 212

Note sur la propriété de la cycloïde, d'être la seule tautochrone dans le vide; par M. *E.-L. Guillon*. 216

Lettres sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique concernant l'ellipsoïde, adressées à M. P.-H. Blanchet, par *J. Liouville*. (Première Lettre.) 217

Extrait d'une Lettre adressée à M. J. Steiner, par M. *C.-G.-J. Jacobi*. 237

Remarque sur un point fondamental de la *Mécanique analytique* de Lagrange; par M. *Poinsot*. 241

Note sur l'emploi d'un symbole susceptible d'être introduit dans les éléments du calcul differentiel; par M. *Ernest Lamarle*. 254

Lettres sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique concernant l'ellipsoïde, adressées à M. P.-H. Blanchet, par *J. Liouville*. (Deuxième Lettre.) 261

Sur la surface des ondes; par M. *A. Cayley*. 291

Note sur les fonctions de M. Sturm; par M. *A. Cayley*. 297

Sur les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés; par M. *Michael Roberts*. 300

Note sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables; par M. *Augustin Cauchy*. 313

Sur les arcs à différence rectifiable et les zones à différence planifiable; par M. *Lebesgue*. 331

Pages

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville, par M. *V.-A. Lebesgue*. 336

Remarques sur l'équation $y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0$; par M. *V.-A. Lebesgue*. . . 338

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville, par M. *C.-G.-J. Jacobi*. 341

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville, par M. *William Roberts*. 343

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer; par *J. Liouville*. 345

Note relative au Mémoire précédent; par M. *J. Bertrand*.. 379

OEuvres mathématiques d'*Évariste Galois*. 381

Sur l'équation $\frac{dy}{dx} + f(x) \sin y + F(x) \cos y + \varphi(x) = 0$; par M. *Besge*. 445

Note sur les surfaces orthogonales; par M. *J. Bouquet*.. 446

Note sur la surface réglée dont les rayons de courbure principaux sont égaux et dirigés en sens contraires; par M. *J.-A. Serret*.. 451

Sur une transformation de l'équation

$$\sin\theta \frac{d.\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = 0;$$

par *J. Liouville*. 458

Sur la décomposition des fractions rationnelles; par *J. Liouville*. 462

Sur l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx$; par *J. Liouville*. 464

Sur une classe d'équations du premier degré; par *J. Liouville*. 466

Théorèmes de géométrie; par M. *J. Steiner*. 468

Sur l'intégrale définie $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 + n\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$; par M. *William Roberts*. . . . 471

Sur les sommes des puissances semblables des termes d'un progression arithmétique; par M. *Puiseux*. 477

ERRATA.

Pages.	Lignes.			
3.	21,	*au lieu de*	à un angle droit,	*lisez* à angle droit
11	24.	*au lieu de*	Ghelini,	*lisez* Chelini
95.	21,	*au lieu de*	$2jk$,	*lisez* $2jK$
151.	9,	*au lieu de*	$\sin^2\omega \sin^2\alpha$,	*lisez* $\sin^2\omega - \sin^2\alpha$
205.	7,	*au lieu de*	ou,	*lisez* où
232	13.	*au lieu de*	ρ,	*lisez* ρ'
233.	9.	*au lieu de*	(2) et (3),	*lisez* (B) et (C)
237.	12,	*au lieu de*	est loin de me paraître,	*lisez* ne me paraît pas
240.	30.	*au lieu de*	courbe à double courbure,	*lisez* ligne de courbure
337	6.	*au lieu de*	segment elliptique,	*lisez* segment de paraboloïde elliptique
337.	7,	*au lieu de*	$2\sqrt{3}x^2 =$,	*lisez* $2\sqrt{3}x -$
337.	9.	*remplacez*	S *par*	$3S$ *et* $(1 - n\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\Delta$ *par* $1 - n\sin^2\theta\Delta$
338	12,	*au lieu de*	$a^2 > b^2$,	*lisez* $a^2 < b^2$
340.	2,	*au lieu de*	$p = \frac{1}{a}$,	*lisez* $p = \frac{1}{j}$.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES GÉODÉSIQUES

ET

DES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. MICHAEL ROBERTS [*].

M. Jacobi a le premier trouvé l'intégrale de l'équation différentielle du second ordre relative à la ligne géodésique sur un ellipsoïde à trois axes inégaux. Divers géomètres, et en particulier M. Liouville dans le tome IX de son *Journal de Mathématiques* (page 401), ont ensuite donné sous différentes formes les détails de la démonstration que M. Jacobi avait supprimée. J'ai tiré des formules de M. Liouville quelques conséquences intéressantes que je vais indiquer ici.

Je conserve les notations employées par M. Liouville dans le Mémoire dont j'ai parlé. Cela posé, l'équation

$$\frac{m\,d\mu^2}{n\,d\nu^2} = \frac{\mu^2 - \beta}{\beta - \nu^2}$$

est l'équation différentielle d'une ligne géodésique tangente à la ligne

[*] C'est le Mémoire que nous annoncions dans le dernier cahier et dont les résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 29 décembre 1845. (*Voir* le tome X de ce Journal, p. 466.) (J. LIOUVILLE.)

de courbure déterminée par l'équation $\beta = \mu^2$, si l'on a $\beta > b^2$, et par l'équation $\beta = \nu^2$, si $\beta < b^2$.

En effet, en se rappelant l'équation

$$\beta = \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i,$$

on a, pour le point de contact, $i = 0$, ou $i = \frac{\pi}{2}$, selon que $\beta > b^2$ ou $\beta < b^2$.

Il s'ensuit que pour toutes les lignes géodésiques tangentes à la même ligne de courbure, la quantité β conserve une valeur constante. Si une ligne géodésique passe par un des ombilics (points pour lesquels on a $\mu^2 = \nu^2 = b^2$), nous aurons $\beta = b^2$, quelle que soit sa direction.

Si deux lignes géodésiques, tangentes à la même ligne de courbure, se rencontrent en un point (μ, ν), elles feront de part et d'autre des angles égaux avec les lignes de courbure qui passent par le point (μ, ν). Car on a

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \mu^2 \cos^2 i' + \nu^2 \sin^2 i',$$

d'ou

$$i = i';$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si des ombilics situés aux côtés opposés de l'axe *minimum* au-dessus du plan des x, y, on mène deux lignes géodésiques à un même point de la ligne de courbure dont l'équation est $\mu =$ constante, leur somme sera invariable le long de la ligne de courbure.

En effet, si nous désignons par t, t' les deux rayons, nous aurons

$$dt = ds'' \cos i, \quad dt' = -ds'' \cos i,$$

ce qui donne

$$t + t' = \text{constante}.$$

Cherchons l'équation de la ligne de courbure, en employant pour coordonnées les quantités t, ν. Pour cela, l'équation

$$b^2 = \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i$$

donne

$$\cos i = \sqrt{\frac{b^2 - \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}}.$$

d'où, en se rappelant les formules de M. Liouville,

$$dt = \sqrt{q}\, d\nu \sqrt{\frac{b^2 - \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}},$$

ou

$$dt = \sqrt{\frac{\rho^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2}}\, d\nu;$$

de là résulte

$$t = C + \rho E\left(\frac{c}{\rho}, \varphi\right),$$

en posant $\nu = c \sin \varphi$.

Si l'on désigne par $\rho E\left(\frac{c}{\rho}, \alpha\right)$ l'arc de la section principale qui sert pour le plan des x, z, terminé par l'extrémité de l'axe *minimum* de l'ellipsoïde, et par la ligne de courbure dont il s'agit, nous aurons

$$C = \rho E\left(\frac{c}{\rho}, \alpha\right);$$

on aura donc enfin

$$t = \rho [E(\alpha) + E(\varphi)], \quad t' = \rho [E(\alpha) - E(\varphi)].$$

Il est facile de voir que les lignes de courbure jouissent aussi des propriétés analogues à la propriété fondamentale de l'hyperbole.

Si deux lignes géodésiques, tangentes aux deux lignes de courbure qui répondent aux valeurs β, β' de la constante, passent par un point (μ, ν) et se coupent à angle droit, on aura évidemment

$$\beta + \beta' = \mu^2 + \nu^2.$$

Il s'ensuit que si deux lignes géodésiques sont tangentes à deux lignes de courbure données, et se coupent à un angle droit, le lieu de leur intersection sera une sphéro-conique. Car, par une propriété connue de l'ellipsoïde, la distance du centre de la surface au point (μ, ν) sera constante.

Remarquons encore que toutes les lignes géodésiques qui passent par un ombilic passent aussi par l'ombilic opposé, et que leur longueur entre ces deux extrémités reste la même, indépendamment de leur direction.

Je finirai en citant un théorème de géométrie dû à M. Mac-Cullagh, qui a quelques rapports avec le sujet que je viens d'indiquer :

« Les lignes de courbure de l'ellipsoïde se projettent sur les plans » des sections circulaires, par des droites parallèles à l'axe *minimum* » de la surface, en coniques homofocales ayant pour foyers les pro- » jections des ombilics. Les sphéro-coniques se projettent pareillement » en cercles concentriques. »

P. S. J'ajouterai ici une remarque relative à l'analogie qui existe entre les coniques homofocales et les lignes de courbure de l'ellipsoïde. Pour cela, il faudra se rappeler cette propriété connue :

« Si deux coniques homofocales passent par un point, les rayons » (t, t') tirés des foyers à ce point seront donnés par les formules

$$t = a + a', \quad t' = a - a',$$

» où a et a' sont les demi-axes focaux des coniques. »

Or, si l'on tire des ombilics deux rayons à un point d'intersection de deux lignes de courbure, on a encore

$$t = a + a', \quad t' = a - a',$$

en désignant cette fois par a et a' les demi-axes *ombilicaux elliptiques* des lignes de courbure [*].

[*] Aux théorèmes que vient de citer M. Michael Roberts, je prendrai la liberté d'ajouter le suivant : Si d'un point quelconque M d'une ligne de courbure donnée MM′ on mène deux arcs géodésiques tangents à deux autres lignes de courbure données aussi, le rapport des sinus des angles que ces deux arcs géodésiques forment au point M avec la ligne de courbure MM′ sera constant. Ce théorème se tire immédiatement des formules que j'ai données, et l'on en déduit en même temps pour le triangle géodésique inscrit dans une ligne de courbure une propriété analogue à celle du triangle ordinaire inscrit dans l'ellipse plane. Au reste, l'étude approfondie des lignes courbes tracées sur l'ellipsoïde conduit à une foule de résultats curieux. J'y reviendrai avec détail dans une autre occasion. J. LIOUVILLE.

SUR

LES LIGNES GÉODÉSIQUES ET LES LIGNES DE COURBURE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. CHASLES.

Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXII, séances des 12 et 19 janvier 1846.

A l'occasion de mon Mémoire sur la construction géométrique des amplitudes des fonctions elliptiques [*], M. Liouville a entretenu l'Académie d'une certaine équation qui, intégrale première de l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques tracées sur les surfaces du second degré, exprime, sous forme finie, une belle pro-

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XIX, p. 1239, séance du 9 décembre 1844. — Dans ce Mémoire, qui contient plusieurs constructions géométriques de l'équation des trois amplitudes $\cos\varphi\cos\varphi' \mp \sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{1-c^2\sin^2\mu} = \cos\mu$, j'ai dit qu'il s'en trouvait une qui réalisait l'extension que laissait à désirer la construction donnée par M. Jacobi pour la *multiplication* des fonctions, au moyen d'une portion de polygone inscrite à un premier cercle et circonscrite à un second déterminé convenablement. Je ne connaissais le Mémoire de M. Jacobi que par le troisième supplément au *Traité des fonctions elliptiques* de M. Legendre, et le *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* de M. Verhulst (Bruxelles, 1841, in-8°), où cette construction semble être reproduite intégralement, sans qu'aucun indice fasse soupçonner que l'illustre géomètre de Kœnigsberg ait construit l'équation générale des trois amplitudes. Je n'aurais pas imaginé que M. Legendre surtout, qui reproduisait et commentait avec éloge cette construction, et indiquait quelques vues d'analogie avec le théorème de Côtes, l'eût tronquée et restreinte dans ses usages et ses conséquences théoriques. J'ai connu depuis l'erreur où j'avais été induit, et je saisis ici avec empressement l'occasion de la signaler. Le beau Mémoire de M. Jacobi, traduit par le savant M. Terquem, vient de paraître dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. X, p. 435.

priété de ces lignes. L'importance de ce résultat avait fait désirer à l'auteur que l'on pût y parvenir par de simples considérations de Géométrie [*]. Cette voie simple et naturelle, en effet, qui oblige de considérer les choses en elles-mêmes, en montre mieux que le calcul seul l'origine et les rapports avec nos vérités primordiales, et fait connaître, en général, un enchaînement de propositions dont une partie a pu échapper à l'analyste dans sa marche rapide.

Il semble donc, qu'on me permette ici cette réflexion fort naturelle, il semble que plus l'analyse fait de progrès et étend son domaine, plus la synthèse aurait besoin d'être cultivée et de se perfectionner aussi, pour lui prêter son utile secours. Et cependant, le contraire a lieu depuis un siècle et demi : il semble que l'analyse, confiante dans ses propres forces, n'ait voulu aucun partage avec une méthode qui, après avoir été le seul instrument des Archimède, des Apollonius, des Ptolémée, a su encore, chez les Modernes, donner naissance aux travaux de Képler, de Galilée, d'Huygens et de Newton. La synthèse a été exclue successivement de tout enseignement. C'est, je crois, une erreur du siècle dernier, et qui pourra étonner ceux qui feront l'histoire des sciences de cette époque.

Mais je reviens au sujet de mon Mémoire. Les beaux théorèmes de M. Michael Roberts, communiqués par M. Liouville dans l'avant-dernière séance, ayant ramené l'attention de l'Académie sur l'équation de la ligne géodésique, je me suis occupé de ce sujet, dans le but particulièrement de trouver la démonstration géométrique désirée. Mes recherches n'ont pas été infructueuses, et j'ai l'honneur d'en communiquer les résultats à l'Académie.

Je suis parvenu à une proposition qui comprend, comme corollaire, celle qu'il s'agissait de démontrer, et qui donne lieu à plusieurs autres conséquences parmi lesquelles se distingue une propriété nouvelle de la ligne géodésique.

Cette proposition dérive elle-même d'un théorème sur les surfaces dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, surfaces

* *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XIX, p. 1261 : séance du 9 décembre 1844. — *Journal de Mathématiques*, t. IX, p. 401.

que j'appellerai *homofocales*, parce qu'elles ont les mêmes coniques *focales* ou *excentriques*. Voici l'énoncé de ce théorème que je vais prendre pour point de départ :

THÉORÈME. *Étant donnée une surface du second degré* A, *si par un point quelconque de l'espace* M *on mène les normales aux trois surfaces homofocales qui passent par ce point, et qu'on porte sur ces normales trois segments égaux, respectivement, aux trois demi-axes majeurs de ces surfaces, puis qu'on considère ces segments comme les trois demi-axes principaux d'un ellipsoïde; cet ellipsoïde, qui sera complétement déterminé, jouira des propriétés suivantes :*

1°. *Il passera par le centre de la surface* A, *et sera tangent, en ce point, au plan principal normal à l'axe majeur de cette surface;*

2°. *La section de cet ellipsoïde par son plan diamétral parallèle à ce plan principal, sera une ellipse toujours de même grandeur, quelle que soit la position du point* M *dans l'espace.*

La deuxième partie de cette proposition fait reconnaître aisément que :

Les axes principaux de cette ellipse constante sont parallèles à ceux de la focale de la surface A, *comprise dans son plan principal en question, et ces axes ont leurs carrés égaux, au signe près, aux carrés des axes de cette focale* [*].

Les deux parties de ce théorème fondamental se trouvent démontrées, parmi plusieurs propositions sur les surfaces homofocales, dans mon *Aperçu historique* (pages 363 à 365). Ce théorème est susceptible

[*] J'ai appelé *coniques focales* ou *excentriques*, d'une surface du second degré, trois coniques (dont une est toujours imaginaire) qui donnent lieu, par rapport à la surface, à une théorie analogue à celle des foyers dans les sections coniques. Ces courbes étaient connues, mais à d'autres titres, ainsi que j'ai eu l'occasion de le dire devant l'Académie (*Comptes rendus*, t. XVI, p. 833 et 1107); et les questions dans lesquelles elles s'étaient présentées n'indiquaient nullement la théorie nouvelle dont elles devaient être le fondement. En exposant, pour la première fois, cette théorie dans mon *Aperçu historique* (pages 384-399), j'ai fait connaître une cinquantaine de théorèmes généraux qui s'y rapportent, et j'ai indiqué plusieurs questions dans lesquelles ces théorèmes trouvent une application étendue. Depuis, on a donné quelques propriétés de ces courbes, relatives à leurs points considérés isolément ou deux à

d'un grand nombre de conséquences, mais je vais me borner ici à la proposition qui se rapporte aux lignes géodésiques.

Que par le point M on mène un plan transversal quelconque L, ou plutôt supposons que le point M soit pris dans un plan donné L. Soient i, i', i'' les angles que les normales aux surfaces homofocales à la surface proposée A, qu'on peut mener par le point M, font avec ce plan; et soient ρ, μ, ν les trois demi-axes majeurs de ces surfaces. Ce sont les trois demi-axes principaux de l'ellipsoïde qui a son centre en M. La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de ces trois demi-axes sur le plan L est

$$\rho^2 \sin^2 i + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'';$$

cette somme est égale à celle des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Prenons pour ces trois demi-diamètres celui qui aboutit au centre de la surface A et les deux axes principaux de l'ellipse du théorème précédent. Ces deux axes, d'après ce théorème, sont toujours les mêmes, en grandeur et en direction, quel que soit le point M; de sorte que les trois perpendiculaires auront, respectivement, les mêmes longueurs, quelle que soit la position du point M dans le plan L. Ainsi l'on a

$$\rho^2 \sin^2 i + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \text{constante}.$$

Pour déterminer cette constante, remarquons que dans la série des surfaces homofocales à la surface A, il en est une qui touche le plan L; soit α le demi-axe majeur de cette surface; au point où elle

---

deux. Mais on s'est mépris sur le caractère de ces propriétés, en appelant ces points des *foyers conjugués*, et en croyant que les propositions qui s'y rapportent constituent la théorie en question. Je le répète, ce sont les courbes elles-mêmes qui représentent, dans une surface du second degré, chacune individuellement, les foyers d'une conique, et non leurs points, pris isolément ou deux à deux. Il faut qu'en supposant que la surface se réduise à une conique, parce que l'un de ses axes devient nul, les propriétés relatives à ses *focales* deviennent précisément les propriétés des foyers des coniques. C'est à cette condition, je puis dire à ce *criterium*, qu'on reconnaîtra si des propriétés de ces focales sont les analogues de celles des foyers dans les coniques, et constituent la théorie en question.

touche le plan, les deux autres surfaces homofocales qu'on peut faire passer par ce point auront leurs normales comprises dans le plan, de sorte que pour ce point l'équation sera simplement

$$\alpha^2 = \text{constante}.$$

Ainsi la constante est le carré du demi-axe majeur de la surface tangente au plan L. Écrivons donc

$$\rho^2 \sin^2 i + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2.$$

Cette équation exprime ce théorème :

Théorème. *Étant donnée une surface du second degré, et un plan étant mené arbitrairement dans l'espace, si en chaque point de ce plan on conçoit les normales aux trois surfaces homofocales à la proposée, qui passent par ce point, et qu'on porte sur ces normales, respectivement, des segments égaux aux demi-axes majeurs des trois surfaces, la somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de ces trois segments, sur le plan, sera constante et égale au carré du demi-axe majeur de la surface homofocale qui serait menée tangentiellement au plan.*

C'est ce théorème qui va nous conduire aux propriétés de la ligne géodésique.

Concevons que le plan L passe par la normale en un point m de la surface A; en ce point l'angle i est nul, et l'équation se réduit à

$$(1) \qquad \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2.$$

i' et i'' sont les angles que les normales aux deux lignes de courbure de la surface, qui se croisent en m, font avec la direction mm' de la trace du plan sur la surface. Cette équation nous apprend donc que :

Étant pris sur une surface du second degré A *un élément infiniment petit* mm' *faisant, avec les normales aux deux lignes de courbure qui se croisent en* m, *des angles* i', i'', *l'expression*

$$(\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'')$$

représente le carré du demi-axe majeur de la surface homofocale à la surface A, *qui serait tangente au plan déterminé par l'élément* mm' *et la normale en* m.

Appliquons au point m' l'équation générale, on aura

$$\rho^2 \sin^2 i_1 + \mu_1^2 \sin^2 i'_1 + \nu_1^2 \sin^2 i''_1 = \alpha^2;$$

i_1 est l'angle que la normale en m' fait avec le plan L, et i'_1, i''_1 sont les angles que les normales aux deux lignes de courbure qui se croisent en m' font avec ce même plan. Or, d'une part, l'angle i_1 est infiniment petit, de sorte que le premier terme de l'équation est un infiniment petit du second ordre, qui disparaît; et l'équation se réduit à

$$(2) \qquad \mu_1^2 \sin^2 i'_1 + \nu_1^2 \sin^2 i''_1 = \alpha^2.$$

D'autre part, il n'y a aussi qu'une différence infiniment petite du second ordre entre $\sin i'_1$, $\sin i''_1$ et les sinus des angles que les normales aux lignes de courbure en m' font avec la trace du plan L sur la surface, c'est-à-dire avec l'élément $m'm$, parce que ce plan diffère infiniment peu du plan normal en m'. Nous supposerons donc que i'_1, i''_1 représentent ces angles eux-mêmes dans notre équation (2).

Il suit de là, d'après le théorème conclu de l'équation (1), que le premier membre de l'équation (2) représente le carré du demi-axe majeur de la surface homofocale qui serait tangente au plan normal en m, mené par l'élément $m'm$. Donc, d'après cette équation (2), cette surface est la même que celle à laquelle est tangent le plan normal en m. On a donc ce théorème :

Si par un élément rectiligne mm', *pris sur une surface du second degré, on mène les deux plans normaux à la surface en* m *et* m', *respectivement, ces deux plans seront tangents à une même surface homofocale à la proposée.*

On conclut immédiatement de là cette première propriété des lignes géodésiques :

Les plans osculateurs aux différents points d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré sont tous tangents à une autre surface du second degré homofocale à la première.

Il suit de là que l'équation (1) s'applique, avec la même constante α, à tous les points de la ligne géodésique; d'où résulte cette seconde propriété :

i' *et* i'' *étant les angles que la ligne géodésique fait en chacun*

de ses points avec les normales aux deux lignes de courbure de la surface en ce point, et μ, ν étant les paramètres de ces deux lignes de courbure (c'est-à-dire les demi-axes majeurs des deux surfaces homofocales sur lesquelles elles se trouvent), on a la relation constante

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2,$$

dans laquelle α est le demi-axe majeur de la surface homofocale à laquelle tous les plans osculateurs de la ligne géodésique sont tangents [*].

Voilà donc la démonstration de l'équation des lignes géodésiques, et cette démonstration, comme on voit, fait connaître une expression géométrique de la constante, qui constitue une propriété importante des lignes géodésiques.

Puisque tous les plans osculateurs de la ligne géodésique sont tangents à une même surface homofocale à la proposée, leurs intersections successives sont des droites tangentes elles-mêmes à cette surface : or, ces intersections sont les tangentes à la ligne géodésique ; on peut donc dire que :

Toutes les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré sont tangentes à une seconde surface homofocale à la première.

Leurs points de contact, sur cette surface, forment une courbe dont nous ferons connaître plus loin une propriété générale.

Cette surface rencontre la surface proposée A suivant une ligne de courbure. Au point où la ligne géodésique rencontre cette ligne, sa tangente est nécessairement la tangente à la ligne de courbure, car c'est là la seule droite tangente à la seconde surface. Donc, *toutes les lignes géodésiques répondant à une même constante α sont tangentes à une même ligne de courbure.* De sorte que la ligne de courbure est l'enveloppe de toutes les lignes géodésiques ; et la propriété commune

[*] Cette équation s'applique à une ligne droite tracée dans le plan d'une série de coniques, ellipses et hyperboles, décrites des mêmes foyers. L'une de ces courbes peut être considérée comme une surface infiniment aplatie, dont les autres courbes sont les lignes de courbure.

à ces lignes et à leur enveloppe, c'est que *leurs tangentes sont toutes tangentes à une même surface homofocale à la proposée* [*].

Cela donne une construction très-simple pour déterminer, en chaque point d'une surface, la direction des deux lignes géodésiques qui iront toucher une ligne de courbure donnée.

On conclut de ces considérations, en particulier, que : *Toutes les tangentes à une ligne géodésique issue d'un ombilic vont percer le plan diamétral dans lequel sont situés les ombilics, en des points situés sur la conique focale comprise dans ce plan.*

M. Joachimsthal a démontré la proposition suivante, commune aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure :

P *étant la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur son plan tangent en un point d'une ligne géodésique, et* D *le demi-diamètre de la surface parallèle à la tangente à cette courbe en ce point, on a*

$$\mathrm{PD} = \textit{constante};$$

Et une équation semblable a lieu aussi pour toutes les tangentes à une ligne de courbure [**].

M. Liouville a fait observer que l'équation

$$\mathrm{PD} = \text{constante}$$

des lignes géodésiques revient à l'équation

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \text{constante},$$

c'est-à-dire que l'une comporte l'autre. En effet, on passe de l'une à l'autre par un calcul analytique, comme l'a fait depuis M. Ghelini [***].

Notre théoreme général sur les surfaces homofocales se prête aussi

---

[*] Les arcs de ces courbes compris entre deux points de contact consécutifs sur la ligne de courbure enveloppe sont tous de même longueur, non-seulement pour une même ligne géodésique, mais pour toutes les lignes géodésiques tangentes à la même ligne de courbure.

[**] *Journal de Mathématiques* de M. Crelle; t. XXVI; 1843.

[***] *Sulla curvatura delle linee e delle superficie e sulle linee geodesiche.*

à cette transformation; car, par les propriétés de cette ellipse constante dont il a été question, on est conduit aisément au théorème suivant :

Si en un point m *d'une surface du second degré on mène une tangente faisant, avec les normales aux deux lignes de courbure en ce point, des angles* i', i'', *on aura la relation*

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = a^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{P^2 D^2},$$

dans laquelle a, b, c *sont les trois demi-axes de la surface;* D *son demi-diamètre parallèle à la tangente,* P *la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface en* m, *et enfin* μ *et* ν *les paramètres des deux lignes de courbure qui se croisent en ce point.*

Ce théorème, qui exprime une propriété générale des surfaces du second degré, comprend l'équation

$$PD = \text{constante},$$

commune aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure.

Si maintenant on remplace le premier membre de l'équation par son expression géométrique trouvée précédemment, il vient

$$P^2 D^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 - \alpha^2}.$$

Ce qui exprime cette autre propriété remarquable des surfaces homofocales :

Pour toute tangente commune à deux surfaces homofocales (d'espèce différente), on a, relativement à chaque surface, l'équation

$$PD = \textit{constante}.$$

De là on conclut que :

La courbe, que les tangentes à une ligne géodésique forment par leurs points de contact sur la seconde surface, admet les mêmes équations que la ligne géodésique, savoir :

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \textit{constante} \quad \text{et} \quad PD = \textit{constante}.$$

D et les angles i', i'' se rapportant, non plus à la tangente à la courbe, mais à sa tangente conjuguée.

En effet, ces tangentes conjuguées sont les tangentes mêmes de la ligne géodésique, de sorte qu'elles sont tangentes à la première surface. Donc, pour chacune de ces tangentes, les deux équations ont lieu.

Voici une autre propriété des lignes géodésiques, qui dérive naturellement des considérations précédentes. Concevons la surface développable circonscrite à une surface du second degré suivant une ligne géodésique. Chaque point de l'arête de rebroussement de cette surface sera le sommet d'un cône dont la courbe de contact avec la surface passera par trois points consécutifs de la ligne géodésique; c'est-à-dire que cette courbe de contact sera dans le plan osculateur de la ligne géodésique. Or, ce plan osculateur est tangent à une même surface du second degré; donc le lieu des sommets des cônes est une troisième surface du second degré, qui sera la polaire de la deuxième par rapport à la première. On peut donc dire que :

La surface développable circonscrite à une surface du second degré suivant une ligne géodésique a son arête de rebroussement située sur une autre surface du second degré ;

Et cette seconde surface est la même pour toutes les lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure.

La propriété de la ligne géodésique, que ses tangentes sont toutes tangentes à une seconde surface du second degré, peut se démontrer directement.

En effet, concevons sur une surface A deux éléments consécutifs mm', $m'm''$ d'une ligne géodésique. Il existe une surface B homofocale à la surface A, qui touche en un point n la tangente mm', et il n'en existe qu'une [*]. Le plan tangent en n à cette surface et le plan tangent en m à la surface A sont à angle droit [**]. Or, le plan des deux éléments

[*] En effet, une des propriétés les plus importantes des surfaces homofocales, c'est qu'on peut les considérer comme étant toutes inscrites dans une même surface développable. (*Aperçu*, page 397). Il s'ensuit que les polaires d'une même droite, prises par rapport à ces surfaces, forment un hyperboloïde à une nappe. Cet hyperboloïde rencontre la droite en deux points, qui sont les points de contact de cette droite avec deux des surfaces.

[**] *Aperçu historique*, page 392, art. 55

mm', $m'm''$ est normal à la surface A; donc ce plan est lui-même le plan tangent en n à la surface B. Donc la droite $m'm''$, comprise dans ce plan et infiniment voisine de la tangente en n, est elle-même tangente à la surface B. Ainsi, deux tangentes consécutives à la ligne géodésique sont tangentes à la même surface B. Donc une troisième tangente $m'm''$ sera tangente à cette même surface; et ainsi des autres. Le théorème est donc démontré.

Description des lignes de courbure de même espèce, l'une par l'autre.

Si d'un point d'une ligne de courbure on mène les deux lignes géodésiques tangentes à une deuxième ligne de courbure de même espèce, la somme de ces deux lignes moins l'arc qu'elles interceptent sur la deuxième courbe est une quantité constante; propriété analogue à celle des coniques planes et sphériques. On conclut de là cette construction mécanique des lignes de courbure, qui a lieu aussi pour les coniques : *Que l'on conçoive un fil enroulé à ses deux extrémités sur une ligne de courbure, et qu'un stylet glisse sur la surface en tendant le fil, de manière qu'il s'enroule d'un côté et se déroule de l'autre, le stylet décrira une seconde ligne de courbure de même espèce que la première.* Car la relation énoncée aura lieu, savoir : que la somme des deux lignes géodésiques issues du stylet, et terminées à leurs points de contact avec la ligne de courbure, moins l'arc qu'elles comprennent, sera constante.

Si la ligne de courbure est l'arc d'ellipse principale qui se termine aux deux ombilics, ce mode de description devient celui de M. Michael Roberts, analogue à la description de l'ellipse au moyen d'un fil fixé à ses foyers.

Théorème général sur la description des lignes de courbure des surfaces du second degré. (Séance du 19 janvier 1846.)

Toutes les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré vont toucher une seconde surface du second degré homofocale à la première. Cette propriété caractéristique, qu'on peut

regarder comme la cause géométrique des deux équations de MM. Joachimsthal et Liouville, conduit à un théorème fort curieux qui constitue un procédé mécanique de description des lignes de courbure d'une surface du second degré, par un fil tendu tout à la fois sur cette surface et sur son homofocale. Voici l'énoncé de ce théorème :

Étant données deux surfaces du second degré homofocales (d'espèce différente, pour que l'une ne soit pas comprise entièrement dans l'autre), si un fil a ses extrémités fixées en deux points de la seconde surface, et qu'un stylet qui glisse sur la première tende le fil de manière qu'il s'applique librement sur les deux surfaces, c'est-à-dire qu'il s'applique sur la seconde à partir de ses deux extrémités, qu'ensuite il devienne rectiligne, puis qu'il se courbe suivant deux lignes géodésiques de la première surface, le stylet décrira une ligne de courbure de cette surface, quelle que soit la longueur du fil, et quels que soient les deux points de la seconde surface où sont fixées ses extrémités.

Démonstration. Appelons A la surface sur laquelle glisse le stylet, et B celle sur laquelle sont fixées les extrémités du fil, en deux points P, P'. A partir du point P, le fil s'applique sur la surface B suivant une ligne géodésique. Les tangentes aux différents points m, m',... de cette ligne sont toutes tangentes à la surface A en des points n, n',...; elles sont les directions que prend le brin du fil fixé en P, pour venir s'appliquer sur cette surface A, quand le stylet le tend. Elles forment donc une surface développable tangente à la surface A. Considérons ces deux surfaces comme le prolongement l'une de l'autre à partir de leur courbe de contact $nn'n''$...; elles formeront une nappe continue, puisqu'elles se raccordent suivant cette courbe. J'appellerai cette nappe la *surface composée*. Le fil tendu par le stylet sera, dans chacune de ses positions, une ligne géodésique sur cette surface. En effet, sa partie comprise sur A, entre le point n et le stylet s, est une ligne géodésique : sa partie comprise de n en m est aussi une ligne géodésique, puisqu'elle est droite; il y a donc simplement à prouver que le plan des deux premiers éléments du fil, de part et d'autre du point n, lequel est le plan osculateur de la ligne mixtiligne formée par le fil, est normal à notre surface. Or, cela a lieu, car ce plan comprend deux tangentes à la surface B : l'une est le fil rectiligne nm, et l'autre est dirigée suivant le premier élément curviligne à partir du point n. Or, les deux tangentes considé-

rées ici sont infiniment voisines; elles déterminent donc le plan tangent à la surface B en son point m. Mais ce plan est normal au plan tangent à la surface A en son point n, puisque la droite mn est une tangente commune aux deux surfaces [*]. Il est donc démontré que le plan osculateur en n à la ligne mixtiligne formée par le fil, est normal à la surface A, et conséquemment à notre surface composée. Il s'ensuit que le fil forme sur cette surface une ligne géodésique.

Cela admis, soient s, s' deux positions infiniment voisines du stylet; et smP, $s'm'$P les deux positions du brin fixé en P, m et m' étant les points où la partie rectiligne du fil touche, dans ces deux positions, la surface B. La ligne mm'P est une ligne géodésique dont mm' est un élément; de sorte que m est un point commun aux deux fils P$m'ms$, P$m'ms'$. Ces deux fils formant sur la surface *composée* deux lignes géodésiques, leur différence, d'après le théorème connu de M. Gauss, est égale à la projection de l'élément ss' sur la direction du premier. Pareillement, la différence des deux autres brins, qui aboutissent au point P', est égale à la projection du même élément ss' sur le fil sP'. Or, cette différence est égale à la première, puisque le fil PsP' est de longueur constante; donc les projections de l'élément ss' sur les deux brins sP, sP' sont égales; donc ces deux fils sP, sP' font des angles égaux avec l'élément ss'. Or, ces deux fils sont courbés suivant des lignes géodésiques dont les tangentes touchent toutes la surface B; de sorte que les tangentes en s à ces deux lignes sont les tangentes à la surface B comprises dans le plan tangent à la surface A au point s: en d'autres termes, si l'on conçoit le cône circonscrit à la surface B et ayant son sommet en s, les deux tangentes en question seront les deux arêtes de ce cône comprises dans le plan tangent à la surface A. Mais ce plan tangent est un plan principal du cône [**]; donc les deux tangentes font des angles égaux avec l'un des deux axes principaux du cône compris dans ce plan; or, ces deux axes sont les tangentes aux lignes de courbure de la surface qui se croisent au point s [***]; donc chacune de ces

[*] *Aperçu historique*, p. 392; art. **33**.

[**] *Aperçu historique*, p. 392; art. **32**.

[***] *Ibid.*

lignes fait des angles égaux avec les deux fils sP, sP'; donc l'élément ss appartient à l'une de ces lignes; ce qui démontre le théorème.

Observations. — Nous aurions encore pu dire que les deux lignes géodésiques sP, sP' font des angles égaux avec chacune des deux lignes de courbure en s, *parce que leur équation admet la même constante.* Mais, par les considérations que nous venons d'employer, il n'est pas nécessaire de connaître les équations des lignes géodésiques; de sorte que notre théorème dérive directement et exclusivement de cette propriété purement géométrique de la ligne géodésique, savoir, que toutes ses tangentes touchent une seconde surface homofocale à la première.

J'ai dit que les deux points P, P′ pouvaient être pris arbitrairement sur la surface B. En effet, les deux brins du fil tendu par un stylet situé en s ne peuvent prendre sur la surface A, que les directions des deux lignes géodésiques qui passent par ce point. Mais la démonstration suppose, toutefois, que l'un des points étant pris arbitrairement, le second le soit de manière que les deux brins du fil ne forment pas sur la surface A la même ligne géodésique. La surface B se partagera en deux régions : l'une sera le lieu des points P tels, que le brin fixé en l'un de ces points viendra toujours s'appliquer sur la surface A suivant la même ligne géodésique, et l'autre, le lieu des points P′ du second brin qui s'appliquera toujours sur A suivant la seconde ligne géodésique. Si les deux extrémités du fil étaient fixées en des points de la même région, les deux brins se courberaient donc sur la surface A suivant la même ligne. Cependant il y a encore à considérer que le fil, à partir d'un même point P, peut se diriger suivant deux directions opposées; ce qui pourra permettre de prendre les deux points P, P′ dans la même région.

C'est un fait assez curieux, qu'un fil étant fixé en un point s d'une surface A, si l'on fait glisser son autre extrémité P sur une seconde surface homofocale B, de manière qu'il soit courbé sur les deux surfaces à la fois, il ne cesse pas d'être tangent à une même ligne de la surface A.

Conséquences du théorème général. — Concevons un ellipsoïde A et un hyperboloïde B; le fil peut être fixé en deux points de la courbe d'intersection des deux surfaces et enroulé en partie sur cette courbe; on décrit alors une ligne de courbure de la surface A, à la manière que j'ai déjà indiquée directement.

L'ellipsoïde peut devenir infiniment aplati et se réduire à l'ellipse *focale* ou *excentrique* de l'hyperboloïde. On en conclut que *cette ellipse peut être décrite par un stylet qui tend un fil dont les extrémités sont fixées en deux points de l'hyperboloïde*, pourvu qu'à ses extrémités le fil soit courbé sur l'hyperboloïde.

Supposons que l'hyperboloïde soit à une nappe, et que l'un de ses axes réels devienne nul; cette surface deviendra l'hyperbole lieu des ombilics des ellipsoïdes homofocaux. On en conclut que : *Avec un fil dont les extrémités sont fixées en deux points pris respectivement sur les deux branches d'une hyperbole, on peut décrire des lignes de courbure d'un ellipsoïde qui aurait cette hyperbole pour focale.*

Si les deux points pris sur l'hyperbole sont les ombilics de l'ellipsoïde, on retombe sur le théorème de M. Michael Roberts.

L'ellipsoïde pouvant s'aplatir indéfiniment et devenir l'ellipse *focale*, on en conclut que cette ellipse sera décrite avec un fil fixé aux deux branches de l'hyperbole. C'est le théoreme de M. Ch. Dupin.

Ajoutons que les deux points où sont fixées les deux extrémités du fil, au lieu d'être sur l'hyperbole, ce qui satisfait à la condition que les deux brins du fil soient tangents à la surface B que l'hyperbole représente, peuvent être placés en deux autres points du plan de cette courbe, pourvu que les deux brins s'appuient sur son périmètre.

Le stylet pourra décrire d'autres ellipses de mêmes foyers que l'ellipse focale. Pour cela, il faudra que le fil soit d'une plus grande longueur que pour décrire celle-ci, et qu'en s'appuyant sur le périmetre de cette ellipse focale, il passe sous son plan, et que le stylet le tende et imprime sa trace sur la face inférieure du plan. On décrira, de la sorte, des ellipses de toutes grandeurs, mais toutes homofocales.

Si d'un point P de l'hyperbole focale d'un ellipsoïde, on mène une tangente à cette surface, et qu'on la prolonge par une ligne géodésique, cette ligne passera toujours par le même ombilic O : de sorte qu'on pourra tendre du point P au point O une infinité de fils mixtilignes; *tous ces fils seront égaux entre eux.* Et comme les lignes géodésiques vont passer par l'ombilic opposé, et qu'elles sont égales entre elles, il s'ensuit que : *Si d'un point* P *pris sur l'hyperbole focale d'un ellipsoïde, on mène une tangente à cette surface, cette tangente, moins*

l'arc géodésique mené du point de contact à l'ombilic situé sur la même branche du côté du point P, *forme une longueur constante.*

On conclut de là que :

Quand deux ellipsoïdes sont inscrits dans un cône de révolution qu'ils touchent suivant une même courbe, les arcs géodésiques menés d'un point quelconque de cette courbe aux deux ombilics situés sur les deux calottes elliptiques, ont leur différence constante.

La courbe de contact sur le cône peut être considérée comme le contour d'un ellipsoïde infiniment aplati dont les ombilics sont les foyers. Donc

Quand un cône de révolution est circonscrit à un ellipsoïde, l'arc géodésique mené d'un point de la courbe de contact à un ombilic, et le rayon vecteur mené du même point à un foyer de cette courbe, ont leur différence constante.

Un cône du second degré et une sphère qui a son centre en son sommet, peuvent être considérés comme deux surfaces homofocales ; donc *les tangentes à une ligne géodésique tracée sur un cône du second degré sont toutes tangentes à une sphère qui a son centre au sommet du cône.* Cela est évident et ne sert ici que comme vérification du théorème général.

Je donnerai, dans une prochaine communication, une démonstration directe de l'équation

$$PD = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

relative à toutes les tangentes communes à deux surfaces homofocales, équation que j'ai déduite précédemment de la formule

$$x^2 \sin^2 i' - y^2 \sin^2 i'' = z^2.$$

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

RELATIVE

A L'ÉQUATION DES LIGNES GÉODÉSIQUES

SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR J. LIOUVILLE.

Cette démonstration, que j'ai communiquée à l'Académie dans sa séance du 19 janvier dernier (*Comptes rendus*, t. XXII, p. 111), me paraît à la fois directe et rapide. Elle est fondée sur les propriétés les plus simples des *tangentes conjuguées* que M. Ch. Dupin a introduites avec tant de succès dans les recherches géométriques. On l'applique ici spécialement à l'ellipsoïde pris pour type général des surfaces du second degré.

Soient M, M′ deux points consécutifs d'une ligne géodésique tracée sur un ellipsoïde; MT, M′T′ les tangentes de la courbe en ces points; et MS, M′S′ les tangentes conjuguées, dont les directions diffèrent infiniment peu de celle de l'intersection des deux plans tangents SMT, S′M′T′. Menons par le centre O de l'ellipsoïde, et parallèlement à ces diverses droites, les demi-diamètres OD, OD′, OE, OE′, OI; OI sera l'intersection de deux plans EOD, E′OD′ parallèles aux deux plans tangents SMT, S′M′T′, et différera infiniment peu des parallèles OE, OE′ aux tangentes MS, M′S′. D'après un théorème connu, OD et OE, OD′ et OE′ seront deux systèmes de demi-diamètres conjugués pour les sections faites dans la surface par les plans EOD, E′OD′. Par suite, les droites IE, IE′, qui diffèrent infiniment peu des tangentes à ces sections en E et E′, seront sensiblement parallèles, l'une à OD, l'autre à OD′. Ainsi, en négligeant les infiniment petits du second ordre, ce que nous ferons dans tout ce qui va suivre, les perpendiculaires abaissées des points E et E′ sur les droites

OD et OD′, sont respectivement égales à celles abaissées du point I sur ces mêmes droites. On conclut aisément de là qu'elles sont égales entre elles. En effet, par la propriété fondamentale de la ligne géodésique, le plan DOD′, sensiblement parallèle au plan osculateur de cette ligne en M, doit couper le plan tangent SMT, et conséquemment le plan EOD ou IOD, sous un angle infiniment peu différent de 90 degrés; il s'ensuit que les perpendiculaires abaissées du point I sur OD et OD′ font aussi avec le plan DOD′ des angles infiniment peu différents de 90 degrés; ce qui suffit pour établir la proposition énoncée.

En désignant donc par H et H′ les perpendiculaires abaissées des points E, E′ sur les droites respectives OD, OD′, on a, abstraction faite des infiniment petits du second ordre, $H' - H = 0$; en d'autres termes, on a, pour le lieu des points E,

$$dH = 0 \quad \text{et} \quad H = \text{constante}.$$

De là ce théorème : *Si parallèlement à la tangente en un point quelconque* M *d'une ligne géodésique donnée et à la tangente conjuguée, on conçoit deux demi-diamètres de l'ellipsoïde, la perpendiculaire* H *abaissée de l'extrémité du second de ces demi-diamètres sur le premier sera constante.*

La même propriété appartient, du reste, aux lignes de courbure; elle résulte alors de ce que la tangente à une de ces lignes est toujours perpendiculaire à sa conjuguée; ce qui rend la droite OI, dont on a parlé plus haut, sensiblement perpendiculaire aux deux droites OD, OD′, en sorte que les perpendiculaires H, H′ doivent être regardées comme égales à OI et partant comme égales entre elles.

Soient P la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan tangent en M, et D la longueur du demi-diamètre OD. On sait que le produit PDH est constant et égal au produit des trois demi-axes principaux. Donc, le long d'une ligne géodésique, ou d'une ligne de courbure, on a aussi

$$PD = \text{constante}.$$

C'est l'équation de M. Joachimsthal. Un calcul facile conduit de même

à notre équation

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{constante}.$$

En conservant, en effet, les notations de l'article inséré dans le tome IX de ce Journal, p. 401, on trouve, pour les demi-axes principaux D_2, D_1 de l'ellipse EOD $\left(\text{lesquels sont parallèles aux tangentes des lignes de courbure en M, et font avec COD les angles respectifs } i, \frac{\pi}{2} - i\right)$, les expressions suivantes: $D_2 = \sqrt{\rho^2 - \nu^2}$, $D_1 = \sqrt{\rho^2 - \mu^2}$; par les propriétés des diamètres conjugués, nous avons dès lors

$$\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \nu^2} + \frac{\sin^2 i}{\rho^2 - \mu^2}, \quad HD = \sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2};$$

et par suite

$$H^2 = \rho^2 - \mu^2 \cos^2 i - \nu^2 \sin^2 i.$$

Or, à l'aide de cette formule, on transforme à volonté l'une dans l'autre nos deux équations.

Observons aussi que, sans rien changer aux principes essentiels de la démonstration donnée ci-dessus de l'équation H = constante, on pourrait la présenter sous une forme encore plus concise peut-être, en s'appuyant sur l'égalité des angles que deux éléments consécutifs de la ligne géodésique font avec l'intersection des plans tangents à l'ellipsoïde menés par ces deux éléments, ce qui entraîne l'égalité des angles que la droite OI parallèle à l'intersection fait avec les demi-diamètres OD, OD′ parallèles aux deux éléments: l'égalité des perpendiculaires abaissées du point I sur OD et OD′ en résulte immédiatement.

Si la ligne MM′ était une ligne quelconque tracée sur la surface de l'ellipsoïde, les perpendiculaires abaissées du point I ne seraient plus égales, et l'on n'aurait plus $dH = 0$. L'expression générale de la différentielle dH est assez remarquable. Soient θ l'angle que la droite OI fait avec OD, et $\theta + d\varepsilon$ l'angle qu'elle fait avec OD′. On a $H = OI.\sin\theta$, $H' = OI.\sin(\theta + d\varepsilon)$; donc

$$\frac{dH}{H} = \text{cotang}\,\theta\, d\varepsilon.$$

On peut, dans cette équation, prendre pour δ l'angle EOD ou SMT. quant à $d\varepsilon$, c'est évidemment l'angle que forment entre eux deux éléments consécutifs de la courbe plane dans laquelle la courbe MM′ se transforme lorsqu'on applique sur un plan la surface développable lieu des tangentes conjuguées MS, M′S′.

On a $d\varepsilon = 0$ le long d'une ligne géodésique, et cotang $\theta = 0$ le long d'une ligne de courbure; dans ces deux cas, et dans ces deux-là seulement, $d\mathrm{H} = 0$. Mais l'équation

$$\frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}} = \text{cotang}\,\delta\, d\varepsilon$$

peut être utile dans d'autres circonstances; il est clair, par exemple, qu'elle s'intègre quand on a $d\varepsilon = f(\delta)\,d\delta$, et que par suite elle peut servir à la détermination des courbes dont la propriété fondamentale s'exprimerait par une formule du genre de celle que nous venons d'écrire.

Puisque δ désigne à présent l'angle des deux demi-diamètres conjugués OE, OD de l'ellipse EOD, les valeurs de ces demi-diamètres sont

$$\frac{\mathrm{H}}{\sin\delta}, \quad \frac{\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2}{\mathrm{H}}.$$

La somme de leurs carrés doit être égale à celle des carrés des demi-axes principaux D_1, D_2. De là une équation entre H, D_1, D_2 et δ. Cette équation fournit

$$\text{cotang}\,\delta = \frac{\sqrt{(\mathrm{H}^2 - \mathrm{D}_1^2)(\mathrm{D}_2^2 - \mathrm{H}^2)}}{\mathrm{H}^2} = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sin 2i}{2\mathrm{H}^2},$$

en ayant égard aux valeurs de D_1^2, D_2^2, H^2 données ci-dessus. Cette formule pourra être quelquefois utile.

Application des transcendantes elliptiques aux polygones sphériques, qui sont inscrits à un petit cercle de la sphère, et circonscrits à un autre petit cercle, simultanément;

PAR M. RICHELOT [*].

(Extrait du Journal de M. Crelle, t. V, p. 250. — Traduction de M. TERQUEM.)

I.

Dans le premier cahier du tome III du Journal de M. Crelle [**], M. le professeur Jacobi a ramené aux transcendantes elliptiques le problème : « Trouver la relation » entre la distance des centres et les rayons de deux cercles dont l'un est circonscrit à » un polygone irrégulier et l'autre inscrit au même polygone. » Servons-nous de notations semblables à celles du Mémoire cité; soient donc R′, r' les rayons des deux cercles pour le polygone de $2n$ côtés et a' la distance de leurs centres, et soient R, r, a les lignes analogues pour le polygone de n côtés; désignons, de plus, le premier angle au centre c du polygone $2n$ par 2α, et celui du polygone n par $2\alpha_2$; les deux polygones sont d'ailleurs construits à compter du point P où la droite des centres rencontre le cercle circonscrit; la relation pour le polygone $2n$ est exprimée par

$$\frac{K}{n} = t',$$

où

$$am(K) = \frac{\pi}{2}, \quad am(t') = \alpha,$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = K, \quad \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = t',$$

c étant la constante arbitraire représentée par $\varkappa$ dans le Mémoire cité.

L'expression analogue pour le polygone n est

$$\frac{2K}{n} = t,$$

[*] Le texte allemand porte : Richelot, étudiant à Königsberg. Le Mémoire de M. Richelot a été publié en 1829.

[**] Nous avons donné un extrait du Mémoire de M. Jacobi dans le tome X du présent Recueil. voir page 435.

où

$$am\, t' = \alpha_2,$$

et

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}} = t.$$

Il s'ensuit

$$2t' = t.$$

On peut donc appliquer les formules pour la duplication des transcendantes elliptiques que Legendre a données dans ses *Exercices*, page 25. En y remplaçant φ par α et φ_2 par α_2, on obtient

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha_2 = \operatorname{tang} \alpha \Delta \alpha_2,$$

$$(2) \qquad \sin \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Delta \alpha_2}}.$$

On déduit de l'équation (2)

$$\sin^2 \alpha = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{1 + \Delta \alpha_2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{\cos \alpha_2 + \Delta \alpha_2}{1 + \Delta \alpha_2}, \quad \operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \alpha_2 + \Delta \alpha_2};$$

ces valeurs, substituées dans l'équation (1), donnent

$$(3) \qquad (\Delta \alpha_2)^2 = \frac{\cos \alpha_2 + \Delta \alpha}{\cos \alpha_2 + 1};$$

mais, d'après le Mémoire cité ci-dessus, on a

$$(4) \qquad \Delta \alpha_2 = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \alpha_2} = \frac{R - a}{R + a}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{r}{R + a}.$$

$$(5) \qquad 1 - c^2 = 1 - \varkappa^2 = \frac{R - a)^2 - r^2}{(R + a)^2 - r^2}.$$

Les mêmes formules existent aussi pour α, R', a' et r'; donc

$$(6) \qquad \Delta \alpha_2 = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \alpha_2} = \frac{R' - a'}{R' + a'}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{r'}{R' + a'}.$$

$$(7) \qquad 1 - c^2 = 1 - \varkappa^2 = \frac{(R' - a')^2 - r'^2}{(R' + a')^2 - r'^2}.$$

En posant

$$\frac{R+a}{r}=p, \qquad \frac{R-a}{r}=q,$$

$$\frac{R'+a'}{r'}=p', \qquad \frac{R'-a'}{r'}=q',$$

on déduit des équations (5) et (7) :

$$\frac{q^2-1}{p^2-1}=\frac{q'^2-1}{p'^2-1};$$

les substitutions des équations (4) et (6) dans l'équation (3) donnent

$$\frac{q+1}{p+1}=\frac{q'^2}{p'^2},$$

d'où

$$\frac{q-1}{p-1}=\frac{p'^2}{q'^2}\frac{q'^2-1}{p'^2-1};$$

des deux dernières équations, on tire

$$qp'^2-pq'^2=q'^2-p'^2, \quad qq'^2(p'^2-1)-pp'^2(q'^2-1)=p'^2-q'^2,$$

et par suite

$$(8) \qquad q=\frac{q'^2+q'^2p'^2-p'^2}{q'^2-q'^2p'^2+p'^2},$$

$$(9) \qquad p=\frac{p'^2+q'^2p'^2-q'^2}{p'^2-q'^2p'^2+q'^2};$$

en mettant ces valeurs de q et de p, dans la relation pour le polygone de n côtés, on obtient celle pour $2n$ côtés.

La relation eulérienne pour le triangle est

$$(R+a-r)(R-a-r)=rr',$$

et pour quatre côtés,

$$(R+a-r)(R-a-r)(R-a+r)(R-a+r)=rr'.$$

En introduisant les lettres p et q, ces expressions prennent les formes

$$(p-1)(q-1)=1, \quad (p^2-1)(q^2-1)=1.$$

Pour le pentagone, on trouve cette formule simple, que l'on peut changer dans les équations plus longues de MM. Fuss et Steiner :

$$4p^2q^2(p-1)(q-1)=(p^2+q^2-p^2q^2)^2.$$

Si, maintenant, on met dans les trois dernières expressions les valeurs de p et de q,

tirées des équations (8) et (9), on obtient, après avoir effacé les accents :

Pour l'hexagone,

$$4p^2q^2(p^2-1)(q^2-1)=(p^2+q^2-p^2q^2)^2;$$

Pour l'octogone,

$$16p^4q^4(p^2-1)(q^2-1)=(p^2+q^2-p^2q^2)^4;$$

Pour le décagone,

$$16p^2q^2(p^2-1)(q^2-1)=\left\{\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{p^4q^4-(p^2-q^2)^2}\right\}.$$

Les formules pour l'hexagone et l'octogone peuvent être ramenées, après quelques réductions, à celles qui ont été données par MM. Fuss et Steiner.

Si l'on substitue les valeurs de p et q, (8) et (9), dans les formules pour l'hexagone et l'octogone, on obtient, en effaçant les accents,

Pour le dodécagone,

$$64p^4q^4(p^2-1)(q^2-1)=\left\{\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{p^4q^4-(p^2-q^2)^2}\right\}.$$

et pour le polygone de 16 côtés,

$$256p^8q^8(p^2-1)(q^2-1)=\left\{\frac{[p^4-(p^2q^2-q^2)^2]^2+[q^4-(p^2q^2-p^2)^2]^2+[p^4q^4-(p^2-q^2)^2]^2}{[p^4q^4-(p^2-q^2)^2](p^2+q^2-p^2q^2)}\right\}.$$

§ II.

Les équations de condition pour le triangle et le quadrilatère sphériques s'obtiennent géométriquement de la manière suivante :

Soient C le pôle d'un petit cercle de la sphère et R la distance polaire, et soient c, r les mêmes lignes pour un autre petit cercle; et désignons par a la distance Cc des deux pôles mesurée sur un grand cercle, ainsi que R et r; par un point quelconque A, pris sur le petit cercle C, menons un arc de grand cercle AMA′, touchant le cercle c en M et coupant de nouveau le cercle C en A′; par ce point A′, on mène une seconde tangente A′A″ au même petit cercle c, ensuite A″A‴, etc.; or A, A′, A″, etc., sont sur la circonférence du cercle C, et AA′A″... forme un polygone sphérique inscrit au cercle C et circonscrit au cercle c. Faisons passer par les pôles C et c un arc de grand cercle, coupant le cercle C, à droite en P et à gauche en Q, de sorte que

$$CP = R, \quad cP = R - a, \quad \text{et} \quad cQ = R + a.$$

Ensuite, nommons les angles

$$ACP = 2\varphi, \quad A'CP = 2\varphi', \quad A''CP = 2\varphi'', \quad \text{etc.}$$

Menons par le point P une tangente PP′ au cercle c, et soit P′ est le point d'intersection

de cette tangente avec le cercle C; posons

$$PCP' = 2\beta.$$

Les deux triangles sphériques rectangles AMc, A′Mc donnent

$$\cos AM = \frac{\cos Ac}{\cos r} = \frac{\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi}{\cos r},$$

$$\cos A'M = \frac{\cos A'c}{\cos r} = \frac{\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi'}{\cos r}.$$

Or

$$\sin \frac{AA'}{2} = \sin \frac{AM}{2} \cos \frac{A'M}{2} + \sin \frac{A'M}{2} \cos \frac{AM}{2} = \sin(\varphi' - \varphi).$$

En faisant donc

$$\varkappa = \frac{\cos R \cos a}{\cos r}, \quad \varkappa' = \frac{\sin R \sin a}{\cos r},$$

on obtient

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \sin R \sin(\varphi' - \varphi) = {} & \sqrt{[1 - (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi)][1 + (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi')]} \\ & + \sqrt{[1 + (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi)][1 - (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi')]}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose

$$2\varphi = 0, \quad 2\varphi' = 2\beta,$$

on arrive à une relation entre R, a, r et β, qui devient, après l'introduction des valeurs de $\varkappa$ et de $\varkappa'$,

$$\begin{aligned} & \sqrt{[\cos r - \cos(R - a)][\cos r + \cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\beta]} \\ & + \sqrt{[\cos r + \cos(R - a)][\cos r - \cos R \cos a - \sin R \sin a \cos 2\beta]} \\ & = 2 \sin R \cos r \sin \beta. \end{aligned}$$

En remplaçant $\cos 2\beta$ et $\sin \beta$ en fonction de $\operatorname{tang} \beta$, savoir,

$$\cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \beta}{1 + \operatorname{tang}^2 \beta} \quad \text{et} \quad \sin \beta = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}},$$

on obtient, après quelques réductions,

$$\begin{aligned} & \sqrt{[\cos r - \cos(R - a)]^2 + \operatorname{tang}^2 \beta [\cos r + \cos(R + a)][\cos r - \cos(R - a)]} \\ & + \sqrt{[\cos r - \cos(R - a)]^2 + \operatorname{tang}^2 \beta [\cos r - \cos(R + a)][\cos r - \cos(R - a)]} \\ & = 2 \sin R \cos r \operatorname{tang} \beta. \end{aligned}$$

De là on tire, à l'aide de quelques réductions nouvelles, la formule simple

$$(11) \quad \operatorname{tang}^2 \beta = \frac{\sin^2(R - a) - \sin^2 r}{\cos^2 R \sin^2 r}.$$

Si, parmi tous les polygones de n côtés, inscrits au cercle C et circonscrit au cercle c, on prend celui dont un sommet est en P, en désignant les autres sommets successifs par P', P'',..., $P^{(n-1)}$, il est évident que, dans ce cas, l'arc Cc partagera le polygone en deux parties égales et semblables.

Il suit de là que si l'on compte les angles et toujours dans le même sens à partir de CP, et $P^{(h)}$ désignant un sommet, on aura

$$PCP^{(h)} + PCP^{(n-h)} = 2\pi;$$

donc, si $n = 2h$, alors

$$PCP^{(h)} = \pi,$$

et le sommet $P^{(h)}$ tombe en Q.

Si $n = 2h + 1$, alors

$$PCP^{(h)} + PCP^{(h+1)} = 2\pi;$$

donc

$$\text{arc } P^{(h)}Q = \text{arc } P^{(h+1)}Q.$$

et l'arc $P^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}P^{\left(\frac{n+3}{2}\right)}$ est perpendiculaire sur l'arc PP'.

Si l'on désigne les points de contact des tangentes PP', $P'P''$, etc., par M', M'', etc., alors, pour $n = 2h + 1$, le point $M^{(h+1)}$ tombe sur l'arc Cc.

Ainsi, pour le TRIANGLE sphérique, on a donc

$$P'CM'' = \pi - 2\beta,$$

et de là

$$\cos P'CM'' = \frac{\text{tang } M''C}{\text{tang } P'C} = -\cos 2\beta;$$

ou bien, comme

$$M''C = M''c - Cc = r - a,$$

on a

$$\cos 2\beta = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}a - r}{\text{tang } R}.$$

d'où

$$\frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \frac{\text{tang } R - \text{tang}\frac{1}{2}a - r}{\text{tang } R + \text{tang}\frac{1}{2}a - r}$$

$$\text{tang}^2\beta = \frac{\sin(R + r - a)}{\sin(R - r - a)}.$$

Comparant cette expression à celle qui est donnée par l'équation (11), on obtient

$$(12) \qquad \sin(R - a - r)\sin(R + a - r) = \cos^2 R \sin^2 r.$$

Si le rayon de la sphère devient infini, et si l'on ne conserve que les grandeurs du

deuxième ordre, on obtient

$$R - a - r \quad R - a - r = r,$$

relation connue pour le triangle dans un plan.

Si $a = 0$, les deux cercles ont même pôle : ce cas correspond à celui de deux cercles concentriques sur un plan ; on a alors l'équation de condition

$$\text{tang}\, R = 2\, \text{tang}\, r,$$

pour le triangle équilatéral sphérique.

Pour le QUADRILATÈRE, on a

$$PCP' + P'CP = 2\pi \quad \text{et} \quad PCP' = \pi, \quad PCP = 2\beta$$

Si donc, dans la formule générale, on pose

$$2\gamma = 2\beta, \quad 2\gamma' = \pi,$$

on a

$$\sqrt{[\cos r - \cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\beta][\cos r + \cos(R + a)]}$$
$$+ \sqrt{[\cos r + \cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\beta][\cos r - \cos(R + a)]} = 2 \sin R \cos r \cos \beta$$

Si l'on fait

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \beta}}, \quad \cos 2\beta = \frac{1 - \text{tang}^2 \beta}{1 + \text{tang}^2 \beta},$$

on obtient

$$\sqrt{[\cos r - \cos(R - a)][\cos r + \cos(R + a)] + \text{tang}^2 \beta [\cos r - \cos(R - a)]}$$
$$+ \sqrt{[\cos r + \cos(R - a)][\cos r - \cos(R + a)] + \text{tang}^2 \beta [\cos r - \cos(R + a)]}$$
$$= 2 \sin R \cos r;$$

d'où, après quelques réductions,

$$\text{tang}^2 \beta = \frac{\cos^2 R \sin^2 r}{\sin^2(R + a) - \sin^2 r}.$$

Égalant cette valeur à celle qu'on a obtenue ci-dessus (11), on a

$$[\sin^2(R + a) - \sin^2 r][\sin^2(R - a) - \sin^2 r] = \cos^2 R \sin^2 r.$$

ou

$$(13) \quad \sin(R + a + r) \sin(R + a - r) \sin(R - a + r) \sin(R - a - r) = \cos^2 R \sin^2 r$$

Cette formule a été donnée sans démonstration, par M. Steiner, dans le troisième cahier du tome II du Journal de M. Crelle.

Si le rayon de la sphère devient infini et que l'on conserve seulement les grandeurs du quatrième ordre, on obtient la formule connue, pour le quadrilatère plan,

$$(R + a + r)(R + a - r)(R - a + r)(R - a - r) = r^4.$$

Si $a = 0$, il vient

$$\tang^2 R = 2 \tang^2 r,$$

pour l'équation de condition d'un quadrilatère équilatéral sphérique inscrit au petit cercle ayant R pour distance polaire, et circonscrit au petit cercle du même pôle, ayant r pour distance polaire.

Quoique les deux formules, pour le triangle et le quadrilatère, aient été calculées pour le cas spécial où un sommet est au point P, il sera démontré plus tard qu'elles ont lieu pour un triangle et un quadrilatère situés d'une manière quelconque, car on démontre d'une manière générale cette proposition :

« Si entre deux petits cercles d'une sphère, et à partir d'un point pris sur le plus » grand, on peut construire un polygone fermé, inscrit dans le plus grand et circon- » scrit au plus petit, alors la même construction peut avoir lieu pour un point quel- » conque pris sur le plus grand des deux cercles. »

§ III.

On peut résoudre le problème dans toute sa généralité au moyen des transcendantes elliptiques, en le ramenant à la multisection de ces transcendantes.

Si l'on mène au petit cercle c une tangente DD′ infiniment voisine de la tangente AA′, de manière que DA et D′A′ soient des quantités infiniment petites, alors

$$ADM = 180^\circ - MDA' \quad \text{et} \quad AMD = A'MD';$$

ou bien, en conservant les notations précédentes,

$$AD = \sin R\, d(2\varphi), \qquad A'D' = \sin R\, d(2\varphi'),$$

$$\frac{\sin AD}{\sin AM} = \frac{\sin AMD}{\sin ADM}, \qquad \frac{\sin A'D'}{\sin A'M} = \frac{\sin A'MD'}{\sin A'D'M};$$

ainsi

$$\frac{d(2\varphi)}{d(2\varphi')} = \sqrt{\frac{\cos^2 r - (\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi)}{\cos^2 r - (\cos R \cos a + \sin R \sin a \cos 2\varphi')}};$$

en introduisant $\varkappa$ et $\varkappa'$ avec leurs valeurs ci-dessus, on obtient donc

$$(14) \qquad \frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1 - \varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi}} = \frac{d(2\varphi')}{\sqrt{1 - (\varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi')}}.$$

Si l'on pose

$$\int_0^{2\varphi} \frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1 - \varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi}} = \Pi(2\varphi),$$

l'intégrale complète de l'équation (14) sera

$$\Pi(2\varphi') = \Pi(2\varphi) + \Pi(2\beta);$$

car, lorsque $\varphi = 0$, on a

$$\varphi' = \beta.$$

D'après la notation employée par M. le professeur Jacobi,

$$\Pi(2\varphi') = U', \quad \Pi(2\varphi) = U, \quad \Pi(2\beta) = T.$$
$$2\varphi' = am(U'), \quad 2\varphi = am(U), \quad 2\beta = am(T),$$

et de là

$$U' = U + T$$

est l'intégrale complète de l'équation différentielle (14). L'équation (10) est l'intégrale algébrique de l'équation (14).

Si l'on y fait

$$m = \varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi \quad \text{et} \quad m' = \varkappa + \varkappa' \cos 2\varphi',$$

l'intégrale algébrique prend la forme

$$\sqrt{(1-m)(1+m')} + \sqrt{(1+m)(1-m')} = 2 \sin R \sin(\varphi' - \varphi).$$

Si l'on élimine sin R entre cette équation et son équation différentielle,

$$\varkappa' \left[\sqrt{(1-m)(1-m')} + \sqrt{(1+m)(1+m')}\right] \cdot \left[\frac{\sin 2\varphi' \, d(2\varphi')}{2\sqrt{1-m^2}} + \frac{\sin 2\varphi \, d(2\varphi)}{2\sqrt{1-m^2}}\right]$$
$$= \sin R \cos(\varphi' - \varphi) \, d(2\varphi - 2\varphi'),$$

on retombe sur l'équation (14).

§ IV.

Les valeurs des constantes $\varkappa$ et $\varkappa'$ fournissent les rapports suivants :

$$\cos R \cos a : \sin R \sin a : \cos r = \varkappa : \varkappa' : 1,$$

ou bien

$$\cos(R - a) : \cos(R + a) : \cos r = \varkappa + \varkappa' : \varkappa - \varkappa' : 1;$$

ou bien

$$\cos Pc : \cos Qc : \cos r = \varkappa + \varkappa' : \varkappa - \varkappa' : 1.$$

On peut s'en servir pour construire la multiplication des transcendantes ci-dessus, correspondant à un angle arbitraire 2β.

Étant donc donnés β, $\varkappa$ et $\varkappa'$, on pourra construire R, a et r. En effet, si l'on fait

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi' = \beta$$

dans l'équation (10), il vient

$$(15) \quad \frac{\sqrt{[1-(\varkappa+\varkappa')]}\sqrt{[1+\varkappa+\varkappa'\cos 2\beta]} + \sqrt{[1+\varkappa+\varkappa']}\sqrt{[1-\varkappa+\varkappa'\cos 2\beta]}}{2\sin\beta} = \sin R,$$

(16) $$\operatorname{tang} a = \frac{\gamma'}{\gamma} \cot R,$$

(17) $$\cos^2 r = \frac{\cos^2 R \sin^2 R}{\gamma^2 \sin^2 R + \gamma'^2 \cos^2 R}.$$

Ainsi, pour trouver l'angle $2\varphi'$, qui a la propriété que

$$\Pi(2\varphi') = \Pi(2\varphi) + \Pi(2\beta), \quad \text{ou} \quad U' = U + T,$$

on mène, par le point quelconque C, deux grands cercles faisant entre eux l'angle 2β, l'équation (15) donne la valeur de R; on aura donc les deux points P et P'; l'équation (16) fait connaître a et par conséquent le point c, et l'équation (17) donne le rayon r du petit cercle qui touche le grand cercle PP'; ainsi les deux petits cercles sont déterminés de grandeur et de position. Faisant

$$PCA = 2\varphi,$$

et menant par le point A l'arc de grand cercle AMA' tangent au petit cercle c, on aura

$$PCA' = 2\varphi'.$$

Si par A' on mène une deuxième tangente A'A'', alors

$$PCA'' = 2\varphi'',$$

et

$$\Pi(2\varphi'') = \Pi(2\varphi') + \Pi(2\beta) = \Pi(2\varphi) + 2\Pi(2\beta),$$

ou, d'après la notation ci-dessus,

$$am\, U'' = 2\varphi'', \quad U'' = U' + T = U + 2T,$$

et ainsi de suite; pour la $n^{ième}$ tangente, coupant le cercle C en $A^{(n)}$ et l'angle

$$PCA^{(n)} = 2\varphi^{(n)},$$

on a

(18) $$\Pi(2\varphi^{(n)}) = \Pi(2\varphi) + n\Pi(2\beta).$$

Enfin, pour trouver l'angle $2\beta_n$, qui satisfasse à l'équation

(19) $$\Pi(2\beta_n) = n\Pi(2\beta),$$

il suffit de faire $\varphi = 0$, et de commencer à mener les tangentes à partir du point P.

§ V.

L'équation de condition pour que la position et la grandeur des deux petits cercles tels qu'un polygone sphérique de n côtés, construit comme il a été dit, intercepte sur le plus grand cercle l'arc $2\varphi_n - 2\varphi$, est exprimée par l'équation (18).

Si l'on détermine K' par l'équation

$$am\, K' = 2\pi;$$

c'est-à-dire

$$\Pi(2\pi) = K';$$

alors, si i représente un nombre entier, on a

$$\Pi(2i\pi + 2\varphi) = \Pi(2i\pi) + \Pi(2\varphi), \tag{20}$$

ou, en prenant les amplitudes des deux membres,

$$2i\pi + am\, U = am\,(iK' + U);$$

c'est une consequence de la nature trigonometrique de l'integrale Π, periodique avec 2π.

Si donc on pose

$$2\varphi_n - 2\varphi = 2i\pi$$

dans l'équation (18), alors le polygone commençant en A se ferme au même point; et comme, d'après l'équation (20),

$$\Pi(2\varphi_n) - \Pi(2\varphi) = \Pi(2i\pi),$$

on a donc

$$\Pi(2i\pi) = n\Pi(2\xi); \tag{21}$$

telle est l'équation de condition pour que le polygone se ferme en A.

Cette expression étant indépendante de φ, la position du point A est donc arbitraire. La proposition du § III se trouve ainsi démontrée, et la restriction de commencer le polygone en P est légitimée. Ainsi le problème précédent sur les polygones sphériques est ramené à la multisection de la transcendante elliptique $\Pi(2\pi)$ ou K' en n parties, et on a le théorème suivant :

Théorème I. « Si R et r sont les rayons sphériques de deux petits cercles C, c, » dont l'un est circonscrit à un polygone de n côtés et l'autre inscrit, et désignant la » distance sphérique Cc des deux cercles C, c par a, on a toujours

$$\int_0^{2\xi} \frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha' \cos 2\varphi}} = \frac{i}{n} \int_0^{2\pi} \frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha' \cos 2\varphi}}.$$

i est le nombre de fois que le polygone parcourt tout le périmètre, et β, α, α' sont déterminées par les équations

$$\tang^2 \beta = \frac{\sin(R - a + r)\sin(R - a - r)}{\cos^2 R \sin^2 r}; \quad \alpha = \frac{\cos R \cos a}{\cos r}; \quad \alpha' = \frac{\sin R \sin a}{\cos r}.$$

On a ainsi l'équation de condition analytique entre R, r, a, et l'équation (10) donne l'intégrale algébrique.

§ VI.

Il est intéressant de transformer la transcendante elliptique de l'équation (14) dans

la forme ordinaire, afin de ramener le problème sur la sphère au problème sur le plan.

A cet effet, posons

$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\frac{1-(\gamma+\gamma')}{1-(\gamma-\gamma')}}\operatorname{tang}\psi = g\operatorname{tang}\psi,$$

φ et ψ deviennent simultanement o et $\frac{\pi}{2}$, et

$$d(2\varphi) = \frac{2g\,d\psi}{1+g^2\operatorname{tang}^2\psi\cos^2\psi},$$

$$\sqrt{1-(\gamma+\gamma')\cos 2\varphi} = \sqrt{1+(\gamma+\gamma')\cos 2\psi}\cdot\sqrt{1-(\gamma+\gamma')\cos 2\psi},$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1-\operatorname{tang}^2\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{1-g^2\operatorname{tang}^2\psi}{1+g^2\operatorname{tang}^2\psi},$$

$$\sqrt{1-(\gamma+\gamma')\cos 2\varphi} = \frac{1}{\cos\psi}\sqrt{\frac{1-(\gamma+\gamma')}{1+g^2\operatorname{tang}^2\psi}},$$

$$\sqrt{1+(\gamma+\gamma')\cos 2\varphi} = \sqrt{\frac{1+(\gamma+\gamma')}{1+g^2\operatorname{tang}^2\psi}}\cdot\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\psi\,\frac{[1+(\gamma-\gamma')][1-(\gamma-\gamma')]}{[1-(\gamma-\gamma')][1-(\gamma-\gamma')]}},$$

et de là

$$\frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1-(\gamma+\gamma')\cos 2\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{1+(\gamma+\gamma')^2-(\gamma-\gamma')^2}}\cdot\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{4\gamma'}{1+(\gamma+\gamma')^2-(\gamma-\gamma')^2}\sin^2\psi}}.$$

C'est la forme des différentielles elliptiques ordinaires; et comme la multiplication et l'addition de ces fonctions sont indiquées dans le Mémoire cité de M. Jacobi [*], la construction des différentielles de l'équation (14) est donc ramenée à la construction des differentielles ordinaires.

L'équation de condition pour que le polygone sphérique de n côtés se ferme en un seul tour, savoir,

$$\int_0^{\pi}\frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1-(\gamma+\gamma')\cos 2\varphi}} = n\int_0^{\beta}\frac{d(2\varphi)}{\sqrt{1-(\gamma+\gamma')\cos 2\varphi}},$$

devient maintenant

$$\int_0^{\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{4\gamma'}{1+(\gamma+\gamma')^2-(\gamma-\gamma')^2}\sin^2\psi}} = n\int_0^{\alpha}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{4\gamma'}{1+(\gamma+\gamma')^2-(\gamma-\gamma')^2}\sin^2\psi}};$$

β et α sont liés par la relation

$$\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\frac{1-(\gamma+\gamma')}{1-(\gamma-\gamma')}}\operatorname{tang}\alpha.$$

Faisant

$$\frac{4\gamma'}{1+(\gamma+\gamma')^2-(\gamma-\gamma')^2} = c^2,$$

[*] Crelle, t. X, pag. 38.

et empruntant au Mémoire cité les notations suivantes

$$t = \int_0^{\alpha} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}} = F\alpha, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}} = F\frac{\pi}{2},$$

$$am\, t = \alpha, \quad am.K = \frac{\pi}{2};$$

alors la dernière intégrale devient

$$F\pi = nF\alpha, \quad \text{ou} \quad 2K = nt;$$

mais c'est l'équation de condition pour le polygone plan de n côtés; on a donc ce théorème :

Theoreme II. — L'équation pour le polygone plan de n côtés, qui est

$$2K = nt,$$

» pour le module

$$c = \frac{4\alpha'}{(1+\alpha')^2 - \alpha^2},$$

» donne, conjointement avec l'expression

$$\tang \beta = \sqrt{\frac{1 - (\alpha + \alpha')}{1 - \alpha - \alpha'}} \tang \alpha,$$

le premier angle polaire

$$2\beta = PCP'$$

» pour un polygone sphérique de même nombre de côtés et se rapportant à deux » petits cercles, déterminés de grandeur et de position par les équations (15), (16) et (17).

§ VII.

Si l'on remplace α et α' par leurs valeurs, on obtient

$$g^2 = \frac{\sin\left(\frac{R - a + r}{2}\right) \sin\left(\frac{R - a - r}{2}\right)}{\sin\left(\frac{R + a + r}{2}\right) \sin\left(\frac{R + a - r}{2}\right)},$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{(1+\alpha')^2 - \alpha^2}}$$

$$= \frac{\cos r}{\sqrt{\sin\left(\frac{R + a + r}{2}\right) \sin\left(\frac{R + a - r}{2}\right) \cos\left(\frac{R - a - r}{2}\right) \cos\left(\frac{R - a + r}{2}\right)}} = \frac{\cos r}{\sqrt{M}}.$$

$$z = \frac{4z'}{1 - z' + z(1 + z' - z)} = \frac{\sin R \sin a \cos r}{\sqrt{M}}.$$

$$\tan\frac{\varphi - \varphi'}{2} = \frac{\tan\left(\frac{R - a - r}{2}\right)\tan\left(\frac{R - a + r}{2}\right)}{\tan\left(\frac{R + a - r}{2}\right)\tan\left(\frac{R + a + r}{2}\right)}.$$

et la différentielle générale devient

$$\frac{\cos r}{\sqrt{M}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos r \sin R \sin a \sin^2\varphi}{M}}}.$$

Comparons les expressions pour le polygone sphérique avec celles pour le polygone plan; on a pour le plan

$$\cos\alpha = \frac{r}{R + a}, \quad 1 - z = \frac{\left(\frac{R - a}{r}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R + a}{r}\right)^2 + 1}, \quad \tan^2\alpha = \left(\frac{R + a}{r}\right)^2 - 1$$

et pour la sphère,

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2 R - a - \sin^2 r}{\cos^2 R \sin^2 r} = \frac{\sin\left(\frac{R - a - r}{2}\right)\sin\left(\frac{R - a - r}{2}\right)}{\sin\frac{R + a - r}{2}\sin\frac{R + a + r}{2}}\tan^2\alpha,$$

$$\frac{\tan\left(\frac{R - a - r}{2}\right)\tan\left(\frac{R - a - r}{2}\right)}{\tan\frac{R + a - r}{2}\tan\frac{R + a - r}{2}}.$$

par comparaison, on a donc

$$\frac{\tan\left(\frac{R - a - r}{2}\right)\tan\left(\frac{R - a - r}{2}\right)}{\tan\frac{R + a - r}{2}\tan\frac{R + a - r}{2}} = \frac{\left(\frac{R - a}{r}\right)^2 - 1}{\left(\frac{R + a}{r}\right)^2 - 1}.$$

$$\frac{\sin\left(\frac{R - a - r}{2}\right)\sin\left(\frac{R - a - r}{2}\right)\cos\left(\frac{R - a - r}{2}\right)\cos\left(\frac{R - a - r}{2}\right)}{\cos^2 R \sin^2 r}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{R - a - r}{2}\right)\sin\left(\frac{R - a - r}{2}\right)}{\sin\frac{R + a + r}{2}\sin\frac{R - a - r}{2}}\left[\left(\frac{R - a}{r}\right)^2 - 1\right].$$

d'où l'on tire

$$(22)\quad \frac{R+a+r}{r} = \frac{2\sin\left(\frac{R+a+r}{2}\right)\cos\left(\frac{R-a+r}{2}\right)}{\cos R\sin r} = \frac{\sin R - r + \sin a}{\cos R\sin r}.$$

$$(23)\quad \frac{R+a-r}{r} = \frac{2\sin\left(\frac{R+a-r}{2}\right)\cos\left(\frac{R-a-r}{2}\right)}{\cos R\sin r} = \frac{\sin R - r - \sin a}{\cos R\sin r}.$$

$$(24)\quad \frac{R-a-r}{r} = \frac{2\sin\left(\frac{R-a+r}{2}\right)\cos\left(\frac{R+a-r}{2}\right)}{\cos R\sin r} = \frac{\sin R - r - \sin a}{\cos R\sin r}.$$

$$(25)\quad \frac{R-a-r}{r} = \frac{2\sin\left(\frac{R-a-r}{2}\right)\cos\left(\frac{R+a-r}{2}\right)}{\cos R\sin r} = \frac{\sin R - r + \sin a}{\cos R\sin r}.$$

d'où

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}, \qquad \frac{a}{r} = \frac{\sin a}{\cos R\sin r}.$$

On arrive ainsi à ce théorème :

Théorème III. « Si l'on a une équation de condition entre R, a et r pour un polygone plan de n côtés, inscrit au cercle R et circonscrit au cercle r, et si l'on fait les substitutions suivantes :

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tang} R}{\operatorname{tang} r}, \qquad \frac{a}{r} = \frac{\sin a}{\cos R\sin r}.$$

» on obtient immédiatement l'équation de condition correspondante entre R, r, a sur la sphère pour un polygone sphérique de même nombre de côtés. »

§ VIII.

Vérifions ce théorème sur le triangle et le quadrilatère sphériques pour lesquels nous avons trouvé les formules (12) et (13), par la voie géométrique.

La formule pour le triangle dans le plan est

$$(R+a-r)(R-a+r) = r^2;$$

de là, pour le triangle sphérique, par les équations (23) et (25),

$$\sin(R+a-r)\sin(R-a-r) = \cos R\sin r.$$

La formule pour le quadrilatère plan est

$$(R+a-r)(R-a-r)(R+a+r)(R-a+r) = r^4;$$

de là on conclut, au moyen des formules (22), (23), (24), (25), pour le quadrilatère sphérique,

$$\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)=\cos^4 R\sin^4 r.$$

Les deux formules s'accordent avec ce qui a été trouvé ci-dessus.

La formule pour le *pentagone plan* est

$$4p^2q^2(p-1)(q-1)=(p^2+q^2-p^2q^2)^2=[1-(1-p^2)(1-q^2)]^2,$$

ou, en remplaçant p et q par leurs valeurs,

$$4\left(\frac{R+a}{r}\right)^2\left(\frac{R-a}{r}\right)^2\left(\frac{R+a-r}{r}\right)\left(\frac{R-a-r}{r}\right)$$
$$=\left\{1-\left[\frac{(R+a)^2-r^2}{r^2}\right]\left[\frac{(R-a)^2-r^2}{r^2}\right]\right\}^2.$$

Les formules de transformation (22), (23), (24), (25) donnent

$$\left(\frac{R-a}{r}\right)^2\left(\frac{R-a}{r}\right)^2=\left(\frac{\sin^2 R\cos^2 r-\sin^2 a}{\cos^2 R\sin^2 r}\right)^2.$$

On a donc, pour le *pentagone sphérique*,

$$4(\sin^2 R\cos^2 r-\sin^2 a)^2\sin(R+a-r)\sin(R-a-r)\cos^2 R\sin^2 r$$
$$=(\cos^4 R\sin^4 r-\sin(R+a+r)\sin(R+a-r)\sin(R-a+r)\sin(R-a-r)$$
$$=(\cos^4 R\sin^4 r-N)^2.$$

On obtient de la même manière :

Pour l'*hexagone sphérique*,

$$4(\sin^2 R\cos^2 r-\sin^2 a)^2 N=(\cos^4 R\sin^4 r-N)^2,$$

et pour l'*octogone sphérique*,

$$16(\sin^2 R\cos^2 r-\sin^2 a)^2\cos^2 R\sin^4 r N=(\cos^4 R\sin^4 r-N)^2.$$

SUR LE NOMBRE DES DIVISIONS A EFFECTUER POUR OBTENIR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ENTRE DEUX NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ATHANASE DUPRÉ,
Professeur de Physique au Collège royal de Rennes [*].

Le nombre des opérations à effectuer pour obtenir le plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers $A > a$ pouvant être considérable lorsque le plus petit des deux est fort grand, la recherche d'une limite propre à rassurer les calculateurs a attiré l'attention des analystes.

En octobre 1844, M. Lamé a établi (*Comptes rendus*, tome XIX, page 867) que le nombre des divisions à faire est nécessairement moindre que cinq fois le nombre des chiffres de a.

Précédemment, dans le tome VI de ce Journal (page 454), M. Binet avait démontré que ce nombre est moindre que $\frac{10}{3}\log a$ quand on prend la précaution de faire chaque division par excès ou par défaut, de manière à avoir un reste moindre que la moitié du diviseur.

Je partagerai en trois sections ce que j'ai à dire sur le même sujet. Dans la première, je supposerai, ainsi que M. Lamé, qu'on emploie la méthode ordinaire, qu'on fait toujours usage de restes positifs. Dans la deuxième, j'admettrai que le calculateur s'astreint à suivre l'utile recommandation de M. Binet, qu'il emploie des diviseurs toujours moindres que la moitié du précédent. Enfin, dans la troisième, je ferai voir qu'il est possible de faire usage de diviseurs encore plus petits, et je donnerai les limites relatives à leur emploi. On reconnaîtra aisément qu'une partie des idées que j'ai à développer m'ont été suggérées par la lecture de ce que M. Binet a écrit sur la même question.

[*] Ce travail a été présenté le 1er décembre 1845 à l'Académie des Sciences.

PREMIÈRE SECTION.

Soient A et $a < A$ les deux nombres proposés;

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ les restes successifs, y compris le plus grand commun diviseur a_p;

α le nombre des chiffres de a.

On a évidemment les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a \geqq a_1 + a_2, \quad a_1 \geqq a_2 + a_3, \quad a_2 \geqq a_3 + a_4, \quad a_3 \geqq a_4 + a_5, \quad a_4 \geqq a_5 + a_6, \ldots, \\ \qquad a_{p-2} \geqq a_{p-1} + a_p, \quad a_{p-1} \geqq 2a_p, \end{array}\right.$$

dont la dernière exprime que le dernier quotient, auquel il ne correspond plus de reste, est au moins 2.

On en tire, en substituant successivement dans la première les valeurs de $a_1, a_2, \ldots$,

$$(2)\quad a \geqq 2a_2 + a_3 \geqq 3a_3 + 2a_4 \geqq 5a_4 + 3a_5 \geqq 8a_5 + 5a_6 \geqq \ldots$$

Les facteurs 1, 2, 3, 5, 8,..., qui multiplient les diviseurs, s'obtiennent (cela est évident d'après le mode de substitution) chacun en ajoutant ensemble les deux précédents, et constituent une série récurrente

$$g_0 = 1, \quad g_1 = 2, \quad g_2 = 3, \quad g_3 = 5, \ldots, \quad g_{p-2}, \quad g_{p-1}, \quad g_p,$$

dont M. Binet a trouvé le terme général

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

(voyez *Comptes rendus*, tome XVII, page 563), et sur les propriétés de laquelle M. Lamé a établi son ingénieuse démonstration.

D'après cela, on peut écrire les inégalités (2) ainsi :

$$(3)\quad a \geqq g_1 a_2 + g_0 a_3 \geqq g_2 a_3 + g_1 a_4 \geqq \ldots \geqq g_{p-2} a_{p-1} + g_{p-3} a_p \geqq (2g_{p-2} + g_{p-1}) a_p.$$

et, comme

$$2g_{p-2} + g_{p-1} = g_{p-2} + (g_{p-2} + g_{p-3}) = g_{p-2} + g_{p-1} = g_p,$$

on a enfin

$$(4) \qquad a \overset{=}{>} g_p a_p \overset{=}{>} g_p;$$

d'où

$$a \overset{=}{>} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p+2}\right],$$

et, prenant les logarithmes en négligeant le second terme du deuxième membre,

$$(5) \qquad \log a < \alpha > p.0{,}2089876 + 0{,}0684902.$$

L'abandon du second terme est légitime quand p est impair; lorsqu'il est pair et égal à 2, le second membre a pour valeur 3, son logarithme est 0,4771213, plus faible que celui que nous employons de 0,0093444, quantité qui, retranchée de 0,0684905, change l'inégalité (5) en

$$(6) \qquad \alpha > p.0{,}2089876 + 0{,}0591461.$$

Pour $p > 2 \overset{=}{>} 4$, la correction serait moindre par une double cause; et parce que le second terme serait moindre, et parce que, à des différences égales entre les nombres, correspondent des différences entre les logarithmes d'autant plus petites que les nombres sont plus grands. L'inégalité (6) est donc générale, et l'on en conclut

$$(7) \qquad p < 4{,}785\,\alpha - 0{,}28301.$$

On peut même prendre plus simplement

$$(8) \qquad p < 4{,}785\,\alpha - 0{,}3;$$

car, pour $p \overset{=}{>} 4$, la correction est beaucoup moindre, le terme négatif est numériquement supérieur à 0,3; et, pour $p = 2$, l'inégalité (8) ne peut induire en erreur, puisque son second membre est toujours plus grand que 4.

Par ce procédé, nous arrivons, comme on voit, à une limite un peu inférieure à celle de M. Lamé, qui se trouve par conséquent démontrée exacte à fortiori, ainsi que $p < \frac{24}{5}\alpha$.

On peut objecter à la vérité que cette démonstration est moins propre à entrer dans l'enseignement élémentaire, à cause de l'emploi du terme général d'une série récurrente; mais il est facile de la modifier.

Reprenons l'inégalité (4): on y peut remplacer g_p par une quantité plus petite k^p; après quoi, prenant les logarithmes, on arrive à

$$\alpha > p.\log k,$$

d'où l'on tire

$$p < \frac{1}{\log k}\alpha. \tag{9}$$

Tout se réduit donc à déterminer k de manière que g_p surpasse k^p, quel que soit p. Pour cela, remarquons que l'on doit avoir

$$g_n \overset{=}{>} k^n, \quad g_{n+1} \overset{=}{>} k^{n+1}, \quad g_{n+2} \overset{=}{>} k^{n+2},$$

et, comme

$$g_{n+2} = g_{n+1} + g_n,$$

les deux premières relations étant vraies, il suffit, pour que la troisième se vérifie, que l'on ait

$$k^{n+2} \overset{=}{<} k^{n+1} + k^n,$$

d'où, en prenant l'égalité qui est plus avantageuse,

$$k^2 = k + 1 \quad \text{et} \quad k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

D'ailleurs, cette valeur convient évidemment aux inégalités

$$g_0 = 1 \overset{=}{>} k^0 \quad \text{et} \quad g_1 = 2 > k^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}:$$

donc elle convient à l'inégalité $g_2 > k^2$ et, de proche en proche, à toutes les suivantes. En substituant dans l'équation (9), on obtient enfin la limite

$$p < 4,785\,\alpha.$$

Soit, plus généralement,

$$g_n = rg_{n-1} + qg_{n-2} + \ldots \tag{10}$$

l'équation qui fait connaître un terme d'une série récurrente au moyen des précédents et dans laquelle r, q,... sont supposés positifs; k étant la seule racine positive (plus grande que l'unité quand $r + q + \ldots > 1$) de l'équation

$$k^n = rk^{n-1} + qk^{n-2} + \ldots, \tag{11}$$

on aura

$$g_n > k^n y, \tag{12}$$

quel que soit n, pourvu que cette relation soit vraie pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ jusqu'à h; h étant le nombre des termes de l'échelle de relation.

En effet, admettons les inégalités

$$g_{n-1} > k^{n-1} y, \quad g_{n-2} > k^{n-2} y, \ldots,$$

et ajoutons-les, après les avoir multipliées par r, q,..., il viendra

$$rg_{n-1} + qg_{n-2} + \ldots > (rk^{n-1} + qk^{n-2} + \ldots) y,$$

ou, d'après les équations (10) et (11),

$$g_n > k^n y.$$

Ainsi, on voit que l'inégalité (12), étant vraie par hypothèse jusqu'à $n = h$, l'est pour $n = h + 1$, et, de proche en proche, pour toute valeur de n. Il reste seulement à voir dans chaque cas particulier s'il est possible de choisir y de manière à vérifier l'hypothèse.

Nous aurons à considérer plus loin des séries récurrentes du second ordre où $g_0 = 1 = q$, $g_1 = r$, nombre entier positif; les inégalités à vérifier au moyen de y seront

$$1 \overset{=}{>} k^0 y = y \quad \text{et} \quad r \overset{=}{>} ky;$$

celle-ci donne

$$y \overset{=}{<} \frac{r}{k},$$

et, comme la substitution de r à la place de k, dans l'équation

$$k^2 = rk + 1,$$

montre que cette quantité est inférieure à k, on voit que y est plus

petit que l'unité, et que la première inégalité est aussi vérifiée. Par conséquent, dans ces sortes de séries, on a toujours

$$(13) \qquad g_n > k^n y = rk^{n-1}.$$

Ici k n'est autre chose que la limite, pour $n = \infty$, de $\frac{g_{n+1}}{g_n}$, et les divers rapports $\frac{g_1}{g}, \frac{g_2}{g_1}, \frac{g}{g_2} \cdots$ sont les réduites de cette quantité exprimée en fraction continue

$$k = r + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}$$

Les réduites de rangs impairs sont, comme on sait, plus petites que k, et vont en augmentant; les autres sont plus grandes que k et vont en diminuant.

Au lieu d'appliquer les limites précédentes au nombre des divisions, il est permis de les appliquer à celui des divisions *partielles*, en faisant exception pour la première division qui se compose d'un nombre de divisions partielles évidemment tout à fait indéterminé quand on ne considère que a.

En effet, soient a_n, $a_{n+n'}$, $a_{n+n'+n''}$ des dividendes correspondant à des quotients de 2, 3, 2 chiffres; on aura, au moyen des inégalités (1) et (2), appliquées à ce cas, les relations

$$a \overset{=}{>} (10g_{n-2} + g_{n-3})\, a_n, \qquad a_n > (100g_{n-2} + g_{n-3})\, a_{n+n'},$$

$$a_{n+n'} > (10g_{n''-2} + g_{n''-3})\, a_{n+n+n'}, \qquad a_{n+n'+n''} > g_{p-n-n'-n''}\, a_p.$$

En y remplaçant $2g_{n-2} + g_{n-3}$ par g_n, et $8g_{n-2}$ par $2\frac{2}{3}g_n$, ce qui est permis, puisque l'on a

$$3g_{n-2} > 2g_{n-2} + g_{n-3} = g_n,$$

et ainsi pour les autres g, on trouve

$$a > 3\tfrac{2}{3}g_n a_n, \quad a_n > 33\tfrac{2}{3}g_{n'} a_{n+n'}, \quad a_{n+n'} > 3\tfrac{2}{3}g_{n'} a_{n+n+n'}.$$

Puis, multipliant entre elles toutes ces inégalités, il vient

$$a > (3\tfrac{2}{3})^2 \cdot (33\tfrac{2}{3}) \cdot g_n \cdot g_{n'} \cdot g_{n'} \cdot g_{p-n-n-n'}\, a_p;$$

d'où l'on conclut, à fortiori,

$$a > (3\tfrac{2}{3})^2.(33\tfrac{2}{3}).k^p,$$

car on a vu précédemment que $g_n > k^n$, etc.

Il est facile de généraliser cette inéquation où les facteurs $3\frac{2}{3}$, $33\frac{2}{3}$ et les facteurs analogues $333\frac{2}{3}$,..., qui correspondent aux quotients à 4, 5,... chiffres, entrent évidemment chacun autant de fois qu'il y a de quotients du nombre de chiffres correspondant. Elle devient

$$(14) \qquad a > (3\tfrac{2}{3})^{n_2}.(33\tfrac{2}{3})^{n_3}.(333\tfrac{2}{3})^{n_4}\ldots k^p,$$

en désignant par n_2, n_3, n_4 les nombres des quotients à 2, 3, 4,... chiffres. En prenant les logarithmes, on obtient

$$\alpha > p\log k + n_2\log 3\tfrac{2}{3} + n_3\log 33\tfrac{2}{3} + \ldots,$$

d'où

$$\alpha > (p + n_2 + 2n_3 + \ldots)\log k + n_2(\log 3\tfrac{2}{3} - \log k) + n_3(\log 33\tfrac{2}{3} - 2\log k) + \text{etc.},$$

et, en faisant les calculs numériques, et posant le nombre des divisions partielles $p + n_2 + 2n_3\ldots = \mathrm{P}$,

$$\alpha > \mathrm{P}.0{,}2089876 + n_2.0{,}3552759 + n_3.1{,}1092163 + n_4.1{,}8963413 + \text{etc.}$$

Résolvant par rapport à P, et conservant seulement les parties entières des coefficients des n, ce qui est permis, on arrive à

$$(15) \qquad \mathrm{P} < 4{,}785\,\alpha - n_2 - 5n_3 - 9n_4 - \ldots.$$

La quantité $n_2 + 5n_3 + \ldots$ vaut toujours au moins 1; ainsi l'inégalité (8) est vraie à fortiori quand on y change p en P, ce qu'il fallait démontrer. On ne peut pas craindre que n_l ait un coefficient positif pour certaines valeurs de l plus grandes que celles que nous avons considérées, car le logarithme de $33\ldots 3\frac{2}{3}$ sera toujours $> l - 2$ et $l - 1$ fois le logarithme de $k < \frac{l-1}{3}$, puisque $k < \frac{1}{3}$; par suite, $[\log 33\ldots 3\frac{2}{3} - (l-1)\log k]$ sera toujours une quantité positive, $l - 2$ surpassant $\frac{l-1}{3}$ dès que l surpasse $\frac{5}{2}$.

DEUXIÈME SECTION.

Maintenant supposons qu'on s'astreigne à faire chaque division par excès ou par défaut, de manière à avoir un reste moindre que la moitié du diviseur, ce qui est évidemment toujours possible, puisque les deux restes R et $R_1 < R$, ayant pour somme le diviseur, sont l'un plus grand et l'autre plus petit que sa moitié, si ce n'est quand ils sont égaux, cas dans lequel l'opération se termine immédiatement.

En appelant q le quotient de a_n par a_{n+1}, et r le reste, on aura

$$a_n = a_{n+1} q + r;$$

mais q égale ou surpasse 2, et r égale ou surpasse a_{n+2}; ainsi on peut affirmer que l'un quelconque des diviseurs égale ou surpasse deux fois le suivant, augmenté de celui qui a le second rang après lui. Par suite,

$$a_n \geqq 2a_{n+1} + a_{n+2}, \quad a_{n+1} \geqq 2a_{n+2} + a_{n+3}, \quad a_{n+2} \geqq 2a_{n+3} + a_{n+4}, \ldots,$$

et, en faisant les substitutions convenables,

$$(16) \qquad a_n \geqq 2a_{n-1} + a_{n-2} \geqq 5a_{n-2} + 2a_{n-3} \geqq 12a_{n-3} + 5a_{n-4} \ldots$$

Les nombres $g_0 = 1$, $g_1 = 2$, $g_2 = 5$, $g_3 = 12, \ldots$ sont évidemment chacun égal au double du précédent, augmenté de l'anté-précédent, et ils constituent une série récurrente dont le terme général, calculé par les méthodes connues, est

$$g_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - 1 - \sqrt{2}^{\,n+1}}{2\sqrt{2}}.$$

D'après cela, on peut écrire ainsi les inégalités (16),

$$a_n \geqq g_1 a_{n+1} + g_0 a_{n-2} \geqq g_2 a_{n-2} + g_1 a_{n+3} \geqq g_3 a_{n+3} + g_2 a_{n+4}, \ldots,$$

et, généralement,

$$(17) \qquad a_n \geqq g_{n'} a_{n-n'} + g_{n'-1} a_{n-n'+1}:$$

à fortiori,

$$(18) \qquad a_n \geqq g_{n'} a_{n-n'}.$$

Quand on fait dans cette inégalité $n = 0$, $n' = p$, il vient

$$(19) \qquad a \geqq g_p . a_p,$$

ce qui donne, à fortiori,

$$(20) \qquad a \geqq g_p.$$

Pour la série actuelle, on a

$$r = 2, \quad k = 1 + \sqrt{2},$$

et l'inégalité (20) peut être remplacée par

$$a > 2(1 + \sqrt{2})^{p-1},$$

d'où

$$\alpha > p.0{,}3827755 - 0{,}0817457.$$

En résolvant cette dernière inégalité par rapport à p, on trouve enfin pour limite

$$(21) \qquad p < 2{,}6125\alpha + 0{,}21357.$$

On pourrait diminuer un peu le second terme en choisissant y (page 45), non pas de manière à vérifier

$$g_0 > k^0 y, \quad g_1 > k^1 y,$$

mais bien de manière à avoir

$$g_{10} = 5741 \geqq k^{10} y = (1 + \sqrt{2})^{10} y,$$

$$g_{11} = 13860 \geqq k^{11} y = (1 + \sqrt{2})^{11} y;$$

on sera sûr alors d'avoir $g_p > k^p y$ tant que p surpassera 10. L'emploi des logarithmes donne $\log y = -0{,}0688$ comme vérifiant les deux inégalités. Mettant $p \log(1 + \sqrt{2}) - 0{,}0688$ à la place de $\log g_p$ dans l'équation (20), on trouve

$$(22) \qquad p < 2{,}6125\alpha + 0{,}1807,$$

inégalité qui ne pourrait être inexacte que pour $p < 10$; mais comme, dans ce cas, ses indications s'accordent avec celles de l'inégalité (21), on est assuré de sa généralité.

Reprenons l'inégalité (20) et mettons-y la valeur exacte de g_p pour obtenir une limite minimum entre toutes celles que peut fournir ce procédé, il vient

$$\alpha \geqq \frac{(1+\sqrt{2})^{p+1} - (1-\sqrt{2})^{p+1}}{2\sqrt{2}}.$$

Dans le cas de p pair, le second terme est positif et peut être supprimé; en prenant les logarithmes, on obtient

$$\alpha > p.0{,}3827755 - 0{,}0687695. \tag{23}$$

Lorsque p est impair et égal à 3, $g_p = 12$ et a pour logarithme 1,0791812, quantité plus faible que $p.0{,}3827755 - 0{,}0687695$ de 0,0003758. En faisant porter la correction sur le second terme, l'inégalité devient

$$\alpha > p.0{,}3827755 - 0{,}0691453.$$

Pour $p > 3$, la correction serait plus faible, et parce que le second terme de g serait moindre, et parce que g serait plus grand. Cette inégalité est donc générale, et l'on en tire la limite (22) déjà trouvée. On pourrait ne pas faire subir de correction à l'inégalité (23), cela donnerait

$$p < 2{,}6125\alpha - 0.1797; \tag{24}$$

on aurait encore une limite exacte: car, pour $p \geqq 11$, la correction n'influe pas sur les chiffres conservés, et, pour $p < 11$, l'inégalité (24) donne les mêmes résultats entiers que l'inégalité (22).

Ces limites conduisent à fortiori à des limites plus simples et moins approchées. En réduisant le coefficient de α en fraction continue, on trouve que les réduites qu'il est permis d'employer sont

$$3, \quad \frac{8}{3}, \quad \frac{34}{13}, \quad \frac{81}{31}, \quad \frac{209}{80}.$$

En prenant la seconde, on peut supprimer le terme indépendant de α: en effet, l'équation (24) peut être écrite de la sorte

$$p < 2{,}6666\alpha + (0{,}1797 - 0{,}0541\alpha),$$

et, comme la quantité entre parenthèses est négative toutes les fois que α surpasse 3, on peut la supprimer et réduire la limite à

$$p < \tfrac{8}{3}\alpha, \tag{25}$$

pourvu que cette inégalité subsiste pour $\alpha = 1, 2, 3$. Or, $\alpha = 1$ et 2 donne p au plus égal à 2 et 5, ce qui est exact d'après l'équation (24); $\alpha = 3$ donne $p < 8$, et l'équation (24) donne $p < 8{,}0172$, ce qui laisse craindre $p = 8$, circonstance qui se présente, en effet, quand

$$A = g_9 = 2378 \quad \text{et} \quad a = g_8 = 985.$$

On peut donc admettre la limite $\frac{8}{3}\alpha$, mais avec la restriction que, pour $\alpha = 3$, on prendra $p \overset{=}{<} 8$, et non pas seulement $p < 8$.

Afin de mettre ceci dans le cas d'être présenté à ceux qui n'ont pas étudié les théorèmes relatifs aux séries récurrentes, on peut prouver, pour la série actuelle, que son terme général a vraiment pour expression

$$g_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}.$$

Pour cela, supposons cette vérité établie jusqu'à g_n inclusivement, et montrons que la même expression conviendra pour g_{n+1}, c'est-à-dire qu'on aura

$$g_{n+1} = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+2} - (1-\sqrt{2})^{n+2}}{2\sqrt{2}} = 2.\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}} + \frac{(1+\sqrt{2})^{n} - (1-\sqrt{2})^{n}}{2\sqrt{2}}.$$

Cette équation, en supprimant le dénominateur commun $2\sqrt{2}$, et mettant en facteur commun $(1+\sqrt{2})^n$ et $(1-\sqrt{2})^n$, se réduit à

$$\left.\begin{array}{l} (1+\sqrt{2})^n(1+2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}-1) \\ -(1-\sqrt{2})^n(1-2\sqrt{2}+2-2+2\sqrt{2}-1) \end{array}\right\} = 0.$$

Elle se vérifie évidemment et laisse seulement à établir que l'expression de g_n est exacte pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui n'offre aucune difficulté. Cette démonstration s'applique d'ailleurs à toutes les séries analogues et peut être présentée d'une manière générale.

Les limites trouvées dans cette section peuvent être appliquées au nombre des divisions partielles.

Soient a_n, $a_{n+n'}$, $a_{n+n'+n''}$ des dividendes correspondants à des quotients de 2, 3, 2 chiffres, on aura

$$a_n > 10a_{n+1}, \quad a_{n+n'} > 100a_{n+n'+1}, \quad a_{n+n'+n''} > 10a_{n+n'+n''+1};$$

en changeant dans l'inégalité (18) n et n' successivement en 0 et n, $n+1$ et $n'-1$, $n+n'+1$ et $n''-1$, $n+n'+n''+1$ et $p-n-n'-n''-1$, on obtient aussi

$$a > g_n a_n, \quad a_{n+1} > g_{n'-1} a_{n+n'}, \quad a_{n+n'+1} > g_{n''-1} a_{n+n'+n''},$$
$$a_{n+n'+n''+1} > g_{p-n-n'-n''-1} a_p.$$

Multipliant ensemble toutes ces inégalités et faisant les réductions, on trouve

$$a > 10^2 . 100 . g_n . g_{n'-1} . g_{n''-1} . g_{p-n-n'-n''-1} a_p.$$

Puis, prenant les logarithmes, après avoir supprimé a_p et remplacé g_n par rk^{n-1}, $g_{n'-1}$ par rk^{n-2}, etc., on obtient, en généralisant la formule, ce qui est facile,

$$\begin{aligned} \alpha > \mathrm{P} \log k &+ (n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \ldots)(1 - \log k) \\ &+ (n_2 + n_3 + n_4 + \ldots) \log 2 - 2 \log k), \end{aligned}$$

P, n_2, n_3,... ayant le même sens que page 47. De là on conclut

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P} < 2{,}6125\alpha &- (n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots) 1{,}6124 \\ &- (n_2 + n_3 + n_4 + \ldots) 0{,}3989, \end{aligned} \right.$$

et, à fortiori,

$$\mathrm{P} < 2{,}6125\alpha + 0{,}1797,$$

ce qu'il fallait démontrer. On pourrait, en se servant de l'inégalité (17) au lieu de l'inégalité (18), arriver à une limite plus restreinte encore que l'inégalité (26); mais je n'y vois pas grande utilité.

TROISIÈME SECTION.

En recommandant l'emploi du plus petit R_1 des deux restes R et R_1 de chaque division faite par excès et par défaut, M. Binet a

rendu beaucoup moindre le nombre des opérations à redouter dans la recherche du plus grand commun diviseur. On pourrait, je crois, faire usage de diviseurs encore plus petits et obtenir une nouvelle amélioration. Ainsi, R_1 est toujours moindre que la moitié du diviseur a', mais il peut être compris entre $\frac{a'}{3}$ et $\frac{a'}{2}$; dans ce dernier cas, R est compris entre $\frac{a'}{2}$ et $\frac{2a'}{3}$; la différence $R-R_1$, facile à écrire, est entre o et $\frac{a'}{3}$: qu'on la prenne pour diviseur et R ou R_1 pour dividende, alors on pourra affirmer que chaque diviseur surpassera trois fois le diviseur suivant.

Semblablement, que l'on s'astreigne à choisir pour diviseur la plus petite des quantités R_1, $R-R_1$, $R-2R_1$ et pour dividende R avec la première, R ou mieux R_1 avec la deuxième, et R_1 avec la troisième; alors on pourra affirmer que chaque diviseur surpassera quatre fois le suivant. En effet, cette circonstance a lieu pour R_1 quand $R_1 < \frac{a'}{4}$: pour $R-2R_1 = a'-3R_1$ quand R_1 est compris entre $\frac{a'}{4}$ et $\frac{5a'}{12}$: pour $R-R_1 = a'-2R_1$, depuis $R_1 = \frac{3a'}{8}$ jusqu'à $R_1 = \frac{a'}{2}$. On voit qu'on a même deux des diviseurs proposés qui sont en même temps plus petits que $\frac{a'}{4}$ lorsque R_1 est entre $\frac{5a'}{12}$ et $\frac{3a'}{8}$, c'est-à-dire entre $\frac{10a'}{24}$ et $\frac{9a'}{24}$.

Si les précautions à prendre ne devenaient pas bientôt plus pénibles que l'opération ordinaire, on pourrait aller de plus en plus loin. Pour établir cela, remarquons que, au lieu de R et R_1, on peut prendre pour continuer la recherche du plus grand commun diviseur les quantités

$$mR + nR_1 \quad \text{et} \quad m'R + n'R_1,$$

m, n, m', n' étant des entiers tels que l'on ait les équations

$$(27)\qquad \begin{cases} L(mR + nR_1) + L'(m'R + n'R_1) = R, \\ H(mR + nR_1) + H'(m'R + n'R_1) = R_1, \end{cases}$$

dans lesquelles L, L', H, H' sont des entiers convenables. Cela tient à ce que, d'une part, le plus grand commun diviseur entre R et R_1 divise évidemment les deux nouvelles quantités qui contiennent R ou R_1 dans tous leurs termes, et, d'autre part, le plus grand commun diviseur

entre $mR + nR_1$ et $m'R - n'R_1$ divise les premiers membres des équations (27), et, par conséquent, R et R_1.

De ces équations on tire

$$(28)\quad \begin{cases} Lm + L'm' = 1, & Ln + L'n' = 0, \\ Hm - H'm' = 0, & Hn + H'n' = 1. \end{cases}$$

La première équation (28) fait voir que L et L', m et m' sont premiers entre eux; la derniere montre la même chose pour H et H', n et n'. La seconde prouve que L et L' sont des multiples de n' et n, de sorte qu'on peut poser $L = n't$, $L = -nt$, t étant entier. Alors la première devient

$$mn' - m'n = \frac{1}{t}.$$

d'où il suit que $t = \pm 1$. Ainsi, la condition pour que les deux premières équations puissent être vérifiées par certaines valeurs L, L' est que l'on ait

$$(29)\qquad mn' - m'n = \pm 1.$$

Quant aux deux autres, elles conduisent au même résultat, et il est *suffisant* qu'on choisisse m, n, m', n' de maniere à satisfaire à cette équation pour qu'on puisse affirmer que le plus grand commun diviseur entre $mR + nR_1$ et $m'R + n'R_1$ est le même que le plus grand commun diviseur entre R et R_1.

La réciproque est vraie: deux nombres B et C, qui ont le même plus grand commun diviseur que R et R_1, sont toujours fournis par les expressions $mR + nR_1$, $m'R + n'R_1$, m, n, m', n' satisfaisant à l'équation (29).

Pour le prouver, soit posé

$$mR + nR_1 = B, \quad m'R + n'R_1 = C.$$

R et R_1 n'ont pas de commun diviseur qui ne divise en même temps B et C, et, cela étant, on sait qu'il existe certainement des valeurs de m, n, m', n' qui vérifient ces deux équations. En les adoptant, les équations (27) deviennent

$$LB + L'C = R, \quad HB + H'C = R_1,$$

et, par les mêmes raisons, on voit qu'il existe aussi des valeurs de L,

L′, H, H′ qui les vérifient, ce qui, comme il a été établi plus haut, conduit à la relation (29).

Cela étant, on peut choisir m' et n' de manière à avoir un diviseur $m'R + n'R_1$ plus petit que la moitié, le tiers, le quart, etc., du diviseur précédent. Par exemple, $m' = 0$, $n' = 1$ donnent R_1; $m' = 1$ et $n' = -1$ ou -2, donnent $R - R_1$, $R - 2R_1$, qu'on obtient très-facilement et dont il a été question plus haut; enfin m' et n' peuvent être choisis arbitrairement parmi les nombres premiers entre eux, comme le fait voir l'équation (29) qui fournit ensuite pour m et n des valeurs entières dont on emploie les plus convenables.

Si l'on avait un moyen plus prompt que la recherche du plus grand commun diviseur pour choisir m' et n' le plus avantageusement possible, c'est-à-dire de telle sorte que le diviseur $m'R + n'R_1$ soit minimum, ce diviseur serait lui-même le plus grand commun diviseur cherché, et, comme ce qui se dit de R et R_1 peut s'appliquer aux deux nombres proposés, on n'aurait aucune division à faire. Cela résulte de ce que l'équation

$$m'R + n'R_1 = D$$

peut toujours être vérifiée, puisque R et R_1 n'ont aucun facteur commun qui ne soit dans leur plus grand commun diviseur D, et de ce que l'équation

$$m'R + n'R_1 = U < D$$

ne saurait admettre des valeurs entières pour m' et n', attendu que D divise R et R_1, et ne divise pas U. Toutefois, il faut excepter le cas de $U = 0$ qui répond à deux valeurs exclusivement acceptables pour m' et n', savoir, $m' = \pm \frac{R_1}{D}$ et $n' = \mp \frac{R}{D}$; dans ce cas, l'une des deux quantités est 0 qui admet pour diviseurs tous les nombres entiers, et l'autre est $mR + nR_1 = \pm D$, comme on le voit en substituant dans l'équation (29) les valeurs actuelles de m' et n'; de sorte que le plus grand commun diviseur est encore convenable dans ce cas particulier, et, de plus, il est connu.

En s'astreignant à prendre pour diviseur R_1, ou la plus petite des quantités R_1, $R - R_1$, ou la plus petite des quantités R_1, $R - 2R_1$, $R - R_1$, on peut regarder chaque diviseur comme plus grand que deux, trois, quatre fois le suivant. Il est naturel de se demander si la

loi que l'analogie semble indiquer est vraie, si, en s'astreignant à prendre pour diviseur la plus petite des quantités

$$R - R_1, \quad R - 2R_1, \ldots, \quad R - (b-2)R_1, \quad R_1,$$

on peut affirmer qu'un diviseur quelconque a' surpasse b fois le suivant. Pour résoudre cette question, cherchons pour quelles valeurs de R_1 il arrive que la quantité

$$R - qR_1 = a' - (q+1)R_1$$

est plus petite que $\frac{a'}{b}$. Si $R_1 < \frac{a'}{q+1}$, l'inégalité $a' - (q+1)R_1 < \frac{a}{b}$ donne

$$R_1 > \frac{b-1}{b(q+1)}a';$$

si, au contraire, $R_1 > \frac{a'}{q+1}$, il faut poser

$$qR_1 - R = (q+1)R_1 - a' < \frac{a'}{b}.$$

ce qui donne

$$R_1 < \frac{b+1}{b(q+1)}a'.$$

C'est donc depuis $R_1 = \frac{b-1}{b(q+1)}a'$ jusqu'à $R_1 = \frac{b+1}{b(q+1)}a'$ que la quantité $R - qR_1$ se trouve plus petite que $\frac{a'}{b}$. En donnant à q toutes sortes de valeurs, il est facile de dresser le tableau suivant :

Quantités plus petites que $\frac{a'}{b}$	Lorsque R_1 est compris entre des fractions de a' marquées par	
R_1	0	$\frac{1}{b}$
$R - (b-2)R_1$	$\frac{1}{b}$	$\frac{b+1}{b(b-1)}$
$R - (b-4)R_1$	$\frac{b-1}{b(b-2)}$	$\frac{b+1}{b(b-2)}$
$R - (b-4)R_1$	$\frac{b-1}{b(b-3)}$	$\frac{b+1}{b(b-3)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R - R_1$	$\frac{b-1}{2b}$	$\frac{b+1}{2b} > \frac{1}{2}$.

R_1 étant compris entre 0 et $\frac{a'}{b}$, c'est cette quantité elle-même qu'il faut prendre pour diviseur; on prendrait $R - (b-2)R_1$ si R_1 était entre $\frac{a'}{b}$ et $\frac{b+1}{b(b-1)}a'$, et ainsi de suite; mais il est nécessaire que toutes les valeurs possibles de R_1 tombent entre des quantités inscrites sur une même ligne dans la deuxième et la troisième colonne, et, comme elles sont évidemment rangées par ordre de grandeur dans chacune de ces deux colonnes, cela exige que la première quantité de chaque ligne soit inférieure à la seconde quantité de la ligne précédente ou lui soit égale. En d'autres termes, il faut qu'on ait

$$\frac{b-1}{b(q+1)}a' \overset{=}{<} \frac{b+1}{b(q+2)}a',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2q \overset{=}{>} b-3.$$

Cette inégalité, devant être vérifiée pour $q=1$, donne $b \overset{=}{<} 5$. Pour $q>1$, elle sera vérifiée à fortiori; ainsi, jusqu'à $b=5$ inclusivement, il suffit de prendre la plus petite des quantités

$$R - R_1, \quad R - 2R_1, \ldots, \quad R - (b-2)R_1, \quad R_1,$$

pour pouvoir affirmer que chaque diviseur surpasse b fois le suivant. Lorsque $b=6$ ou 7, il est facile de prouver qu'il devient nécessaire et suffisant d'ajouter à cette série $2R - 3R_1$, et pour $b=8$, d'ajouter en sus $2R - 5R_1$, $3R - 4R_1$, $3R - 7R_1$; c'est ce que font voir les tableaux suivants :

	Quantités plus petites que $\frac{a'}{b}$	Lorsque R_1 est compris entre des fractions de a' marquées par	
$b = 6$	R_1	0	$\frac{1}{6}$
	$R - 4R_1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{30}$
	$R - 3R_1$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$
	$R - 2R_1$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$
	$2R - 3R_1$	$\frac{11}{30}$	$\frac{13}{30}$
	$R - R_1$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$.
$b = 7$	R_1	0	$\frac{1}{7}$
	$R - 5R_1$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{42}$
	$R - 4R_1$	$\frac{6}{35}$	$\frac{8}{35}$
	$R - 3R_1$	$\frac{6}{28}$	$\frac{8}{28}$
	$R - 2R_1$	$\frac{6}{21}$	$\frac{8}{21}$
	$2R - 3R_1$	$\frac{13}{35}$	$\frac{15}{35}$
	$R - R_1$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{2}$.
$b = 8$	R_1	0	$\frac{1}{8}$
	$R - 6R_1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{56}$
	$R - 5R_1$	$\frac{7}{48}$	$\frac{9}{48}$
	$R - 4R_1$	$\frac{7}{40}$	$\frac{9}{40}$
	$R - 3R_1$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$
	$2R - 5R_1$	$\frac{15}{56}$	$\frac{17}{56}$
	$3R - 7R_1$	$\frac{23}{80}$	$\frac{25}{80}$
	$R - 2R_1$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$
	$2R - 3R_1$	$\frac{15}{40}$	$\frac{17}{40}$
	$3R - 4R_1$	$\frac{23}{56}$	$\frac{25}{56}$
	$R - R_1$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$.

Au delà de $b = 5$, le choix à faire devient trop pénible, comme on voit, pour qu'il y ait lieu de s'y astreindre dans la pratique. Au reste, ces considérations conduisent quelquefois à remplacer des divisions fort simples par des soustractions avec lesquelles elles sont au fond tout à fait identiques; aussi sont-elles, dans bien des cas, plutôt propres à rassurer le calculateur sur la longueur des opérations qu'à les abréger beaucoup.

Quant à la limite propre à chaque cas considéré, on peut en obtenir une expression générale : comme on le verra plus loin, l'inégalité $a > g_p$ ou $\alpha > \log . g_p$ a encore lieu au moins jusqu'à $b = 5$, et g_p est le terme général d'une série récurrente du second ordre où $q = 1$, et dans laquelle r égale b. On aura donc, équation (13),

$$a > rk^{p-1} \quad \text{et} \quad \alpha > (p-1)\log k + \log r;$$

mais, k étant racine de l'équation

$$k^2 = rk + 1,$$

a pour valeur $\frac{r + \sqrt{r^2+4}}{2}$, ce qui conduit à

$$(30) \qquad p < \frac{\alpha}{\log(r+\sqrt{r^2+4}) - \log 2} + 1 - \frac{\log r}{\log(r+\sqrt{r^2+4}) - \log 2}.$$

Dans le cas particulier où $r = 3$, cette inégalité devient

$$p < 1{,}9273\,\alpha + 0{,}0805.$$

Lorsque $r = 4$, on a

$$p < 1{,}6322\,\alpha + 0{,}0174;$$

$r = 5$ donne

$$p < 1{,}3979\,\alpha + 0{,}023,$$

et, si l'on préférait des résultats plus simples, mais moins approchés, on pourrait prendre, quand $r = 3$, $p < 2\alpha$; pour $r = 4$, $p < \frac{5}{3}\alpha$; enfin, pour $r = 5$, $p < \frac{7}{5}\alpha$ avec la restriction que, pour $\alpha = 5$, on pourra avoir $p \overset{=}{<} 7$; l'égalité a lieu quand les nombres proposés sont 509626 et 98145, c'est-à-dire g_8 et g_7. Les quotients sont alors tous égaux à 5, et les restes sont

$$g_0 = 1,\ g_1 = 5,\ g_2 = 26,\ g_3 = 135,\ g_4 = 701,\ g_5 = 3640 \text{ et } g_6 = 18901.$$

Pour savoir si ces diverses limites peuvent être appliquées aux divisions *partielles*, reprenons l'inégalité

$$\alpha > \mathrm{P}\log k + (n_2 + \ldots)(1 - \log k)\ldots$$

de la page 52, qui est générale et ne change ici que parce que la va-

leur de k n'est plus la même. Dans le cas particulier où $0 = n_3 = n_4 \ldots$, elle devient

$$\alpha > P \log k + n_2 (1 + \log r - 3 \log k),$$

et, comme n_2 peut être grand et rendre le terme dans lequel il entre plus considérable que le dernier terme de l'équation (30), il est nécessaire que l'on ait

$$(31) \qquad 1 + \log r \geqq 3 \log k = 3 \log \frac{r + \sqrt{r^2 + 4}}{2}.$$

En supprimant le nombre 4 sous le radical, on arrive à

$$1 > 2 \log r,$$

ce qui fait voir que r doit être au plus 3. D'ailleurs, ce nombre porté dans l'équation (31) ne vérifie pas cette inégalité qui est exacte seulement pour $r = 2$, cas déjà traité. Ainsi, les limites trouvées dans la troisième section ne sont point applicables aux divisions partielles, ou, si cela est pour quelqu'une d'elles, la première, par exemple, l'inégalité $\alpha > P \log k +$ etc., de la page 52, ne peut, telle qu'elle est, servir à le démontrer.

Il reste maintenant à prouver l'exactitude de l'inégalité $a > g_p$, ou plutôt celle de la relation $a_n > ba_{n+1} + a_{n+2}$, d'où elle est déduite.

Lorsque le quotient de a_n par a_{n+1} surpasse b, cette relation est évidente.

Si ce quotient est précisément égal à b, il peut arriver que le diviseur employé soit $R_1 = a_{n+1}$. Alors on a le même reste en prenant pour dividende R ou $R + R_1 = a_n$, et ce reste, s'il n'est pas a_{n+2}, est plus grand que cette quantité; il n'y a donc lieu à examiner la question qu'autant que le quotient égale b et le diviseur diffère de R_1.

Dans cette hypothèse, soit d'abord

$$b = 3.$$

Le diviseur est $R - R_1 = a_{n+1}$ et le dividende est R_1; le quotient est plus petit que 2, puisque $a_n > 2R_1$ donne un quotient < 4, et l'on a

$$R_1 = (R - R_1) - (2R_1 - R), \quad (R + R_1) = 3(R - R_1) + 2(2R_1 - R).$$

On voit que $2R_1 - R$ égale ou surpasse a_{n-2}; ainsi on peut affirmer que

$$a_n \overset{=}{>} 3a_{n+1} + 2a_{n+2} > 3a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Soit maintenant

$$b = 4.$$

Le dividende est R_1, le diviseur est $R - R_1$, $R - 2R_1$ ou $2R_1 - R$; de là trois cas à distinguer :

Premier cas. Le quotient ne peut atteindre le nombre 2; car, a_n ne contenant par cinq fois a_{n+1}, on a

$$R + R_1 < 5(R - R_1),$$

d'où l'on tire

$$R_1 < 2(R - R_1);$$

on peut donc écrire

$$R_1 = (R - R_1) + (2R_1 - R),$$

et a_{n+2} se trouve être la plus petite des quantités

$$2R_1 - R, \quad (R - R_1) - (2R_1 - R) = 2R - 3R_1,$$
$$(2R_1 - R) - (2R - 3R_1) = 5R_1 - 3R, \quad \text{etc.}$$

D'ailleurs, en divisant $a_n = R + R_1$ par $a_{n+1} = R - R_1$, on obtient

$$R + R_1 = 4(R - R_1) + (5R_1 - 3R).$$

$5R_1 - 3R$ étant l'une des quantités dont la plus petite est a_{n+2}, on conclut de cette inégalité ce qui est en question.

Deuxième cas. $R_1 = (R - 2R_1) + (3R_1 - R)$,

$$R + R_1 = 4(R - 2R_1) + 3(3R_1 - R),$$

et l'on voit que

$$a_n \overset{=}{<} 4a_{n+1} + 3a_{n+2} > 4a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Quant au quotient de R_1, il a bien l'unité pour partie entiere, car

$$R + R_1 < 5(R - 2R_1) \quad \text{donne} \quad R_1 < \tfrac{4}{3}(R - 2R_1).$$

Troisième cas. $R + R_1 < 5(2R_1 - R)$ donne $R - R_1 < 2R_1 - R$.

Ainsi, dans l'hypothèse, ce cas ne peut se présenter, le diviseur ne peut être $2R_1 - R$, puisqu'il en existe un plus petit qu'on aura dû prendre.

Lorsque $b = 5$, le dividende est toujours R_1, le diviseur peut être

$$R - R_1, \quad R - 2R_1, \quad 2R_1 - R, \quad R - 3R_1, \quad 3R_1 - R.$$

Premier cas. $R + R_1 \begin{matrix} > 5(R - R_1) \\ < 6(R - R_1) \end{matrix}$ donne $R_1 \begin{matrix} > 2(R - R_1) \\ < 2\frac{1}{2}(R - R_1) \end{matrix}$,

et, par suite, on a

$$R_1 = 2(R - R_1) + (3R_1 - 2R);$$

mais on a aussi

$$R + R_1 = 5(R - R_1) + 2(3R_1 - 2R),$$

et l'on en conclut

$$a_n \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 5a_{n+1} + 2a_{n+2} > 5a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Deuxième cas. $R + R_1 < 6(R - 2R_1)$ donne $R - 2R_1 > 3R_1 - R$; ce cas ne peut donc se présenter, le diviseur choisi ne peut être $R - 2R_1$ dans l'hypothèse.

Troisième cas. $R + R_1 \begin{matrix} > 5(2R_1 - R) \\ < 6(2R_1 - R) \end{matrix}$ donne $R_1 \begin{matrix} > 2(2R_1 - R) \\ < \frac{7}{2}(2R_1 - R) \end{matrix}$;

le quotient a pour partie entière 2 : ainsi

$$R_1 = 2(2R_1 - R) + (2R - 3R_1);$$

d'ailleurs

$$R + R_1 = 5(2R_1 - R) + 3(2R - 3R_1),$$

et l'on voit que

$$a_n \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 5a_{n+1} + 3a_{n+2} > 5a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Quatrième cas. $R + R_1 < 6(R - 3R_1)$ donne $R_1 < \frac{5}{4}(R - 3R_1)$, le quotient entier est 1, et l'on a

$$R_1 = (R - 3R_1) + (4R_1 - R), \quad R + R_1 = 5(R - 3R_1) + 4(4R_1 - R);$$

d'où

$$a_n \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} 5a_{n+1} + 4a_{n+2} > 5a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Cinquième cas. $R + R_1 < 6(3R_1 - R)$ donne $3R_1 - R > R - 2R_1$: ainsi ce cas ne peut se présenter dans l'hypothèse ; on doit prendre un autre diviseur que $3R_1 - R$, puisqu'il en existe au moins un plus petit parmi les quantités entre lesquelles on a dû prendre la plus petite.

Lorsqu'on veut bien se borner à des limites un peu moins approchées, on peut, surtout au delà de $b = 3$, employer la démonstration beaucoup plus simple donnée par M. Binet. On a évidemment

$$a > ba_1, \quad a_1 > ba_2, \ldots \quad a_{p-1} > ba_p :$$

ou bien

$$a > ba_1 > b^2 a_2 \ldots > b^p a_p > b^p,$$

et, par suite,

$$p \log b < \log a.$$

d'où

$$p < \frac{1}{\log b} \alpha,$$

ce qui donne

$$\text{pour } b = 4, \quad p < 1{,}661\,\alpha < \tfrac{5}{3}\alpha ;$$
$$\text{pour } b = 5, \quad p < 1{,}4307\,\alpha < \tfrac{3}{2}\alpha.$$

Dans le cas où il existe n_2 quotients à deux chiffres, n_3 quotients à 3 chiffres, etc., on arrive de la même manière à

$$a > b^{p-n_2-n_3\ldots} . 10^{n_2} . 100^{n_3} \ldots,$$

d'où l'on tire

$$(p - n_2 - n_3 \ldots) \log b + n_2 + 2n_3 + \ldots < \alpha,$$

et

$$\left.\begin{array}{l} p + n_2 + 2n_3 + \ldots \ \log b \\ \quad + n_2 (1 - 2\log b) \\ \quad + n_3 (2 - 3\log b) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} < \alpha.$$

Cette inégalité peut être réduite à

$$p + n_2 + 2n_3 + \ldots = P < \alpha,$$

lorsqu'on a $1 > 2\log b$, ce qui entraîne $2 > 3\log b$, etc. Or, cette relation exige que b qui est entier soit au plus 3, et ne permet pas, par conséquent, d'affirmer que les deux dernières limites sont applicables aux divisions partielles, comme on pourrait le dire de la limite obtenue de la même manière pour $b = 3$ et qui est $p < 2{,}096\alpha$.

Enfin, je terminerai en faisant remarquer que, quand on peut consulter un tableau des g, on obtient une limite par sa seule inspection, pourvu qu'on se rappelle l'inégalité $a > g_p$; cette limite est même fréquemment préférable à celles qui sont exprimées en fonction de α. Par exemple, si nous nous reportons à la première section, nous verrons que, a étant compris entre $g_{15} = 1597$ et $g_{16} = 2584$, g_p, qui est plus petit que a, est au plus g_{15}, et qu'il ne peut y avoir, par conséquent, plus de 15 divisions. La limite de M. Lamé en indique au plus 19, et la limite (8), page 43, au plus 18.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. AUGUSTE MIQUEL.

(TROISIÈME PARTIE.)

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DES TROIS CERCLES;

DÉMONSTRATION DES PRINCIPES DE LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE;

EXTENSION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT SUR LA SURFACE DE LA SPHÈRE;

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DES QUATRE SPHÈRES.

I.

Deux circonférences qui se coupent forment à chaque point d'intersection quatre angles qui, pris deux à deux, sont égaux ou supplémentaires. Mais en prenant pour l'angle de ces circonférences celui qui se trouve formé, à chaque point d'intersection, par les deux arcs que décrirait un point partant de cette intersection et exécutant successivement sur chaque circonférence un mouvement de rotation dans le même sens, il arrive que l'angle des deux circonférences est précisément égal à celui des rayons menés des deux centres à un même point quelconque d'intersection. Cela étant, l'angle de deux circonférences qui se touchent intérieurement est nul; et celui de deux circonférences qui se touchent extérieurement est égal à deux droits.

II.

Lorsqu'une droite issue d'un des centres de similitude de deux cercles coupe leurs circonférences, les rayons qui aboutissent à deux intersections homologues sont, d'après la nature des centres de similitude, parallèles entre eux deux à deux. De là, en ayant égard à l'égalité des angles curvilignes symétriques ainsi qu'à celle des angles

opposés par le sommet, et en considérant les lignes droites comme des circonférences infinies, on déduit les théorèmes suivants :

Les angles qu'une sécante issue du centre de similitude direct de deux cercles fait avec chaque circonférence sont égaux entre eux; et réciproquement.

Les angles qu'une sécante issue du centre de similitude inverse de deux cercles fait avec chaque circonférence sont supplémentaires l'un de l'autre; et réciproquement.

Tout cercle réciproque [*] *par rapport au centre de similitude direct de deux cercles fait à sa rencontre avec leurs circonférences des angles égaux entre eux; et réciproquement.*

Tout cercle réciproque par rapport au centre de similitude inverse de deux cercles fait, à sa rencontre avec leurs circonférences, des angles supplémentaires l'un de l'autre; et réciproquement.

III.

Lorsqu'une suite de cercles C, C′, C″,... *est telle que chacun d'eux coupe une circonférence donnée* O *sous un angle* A *et une circonférence* O′ *sous un autre angle donné* A′, *toute circonférence* O″ *qui aura même axe radical avec les cercles* O *et* O′ *sera coupée sous un même angle* A″ *par chacun des cercles de la suite* C, C′, C″,....

En effet, soient N et M deux intersections antihomologues du cercle O avec les deux cercles C et C′, D et E deux intersections antihomologues du cercle O′ avec les mêmes cercles C et C′. Puisque les cercles C et C′ sont par hypothèse coupés aux points N et M antihomologues sous un même angle A par un même cercle O, d'après une des propositions précédentes, la droite MN qui joint ces points doit passer par le centre de similitude direct des cercles C et C′. De même, la droite DE doit passer par le centre de similitude des cercles C et C′. Ce centre n'est donc autre chose que le point I d'intersection des

[*] Conformément à l'usage adopté par plusieurs géomètres, nous appelons cercle réciproque de deux autres un cercle qui passe par deux intersections antihomologues faites sur leur circonférence par une sécante issue d'un de leurs centres de similitude.

droites NM et DE. Comme, d'après une propriété connue, les produits de similitude IN.IM et ID.IE sont égaux entre eux, le point I doit appartenir à l'axe radical des cercles O et O'.

Menons du point I une droite à un des points B d'intersection du cercle O'' avec la circonférence C'. Puisque le point I est le centre de similitude des deux cercles C et C', la droite IB coupera le cercle C en un point P tel que les produits de similitude IP.IB et ID.IE seront égaux entre eux. Or les trois cercles O, O', O'' ayant, par hypothèse, le même axe radical passant par le point I, en désignant par P' la seconde intersection du cercle O'' avec IB, on doit avoir

$$IP'.IB = ID.DE.$$

Comparant les deux dernières égalités, on voit que

$$IP = IP'.$$

Ce qui nous montre que la circonférence O'' doit couper la circonférence C au point P de la droite IB. Par conséquent, les points B et P étant deux intersections antihomologues du rayon PB de similitude des cercles C et C', la circonférence O'' qui passe par ces points B et P coupe les circonférences C et C' sous un même angle A''. On démontrerait de la même manière qu'elle coupe sous le même angle les circonférences C et C''. Donc, toute circonférence O'' qui a même axe radical avec les cercles O et O' coupe sous le même angle tous les cercles de la suite C, C', C'',....

Corollaire I. Supposons décrite une circonférence K qui, ayant même axe radical avec les cercles O et O', ne fasse que toucher un des cercles C' de la suite C, C', C''...., il est évident, d'après la proposition précédente, qu'il sera tangent à tous les autres cercles de la même suite. Il en est de même du second cercle K' qui peut se construire de la même manière que le cercle K, mais de l'autre côté de l'axe radical. Donc :

Lorsqu'une suite de cercles C, C', C'',... *est telle que chacun d'eux coupe un cercle* O *sous un angle* A *et un cercle* O' *sous un angle* A', *elle a pour enveloppe deux circonférences de cercle* K *et* K' *qui ont même axe radical avec les cercles* O *et* O'.

Corollaire II. *Lorsque plusieurs circonférences de cercle* C, C′, C″ *touchent toutes d'une même manière le cercle* O, *et toutes d'une même manière le cercle* O′, *tout cercle* O″ *qui aura même axe radical avec* O *et* O′ *coupera sous un même angle toutes les circonférences* C, C′, C″.....

Scolie. *Si un cercle* C_1 *touche chacun des cercles* O *et* O′ *d'une manière inverse à celle du cercle* C, *le cercle* O″ *coupera les cercles* C *et* C_1 *sous des angles supplémentaires.*

En effet, parmi toutes les circonférences qui sont tangentes à chacun des cercles O et O′ de la même manière que le cercle C, il y en a une, de rayon infini, qui n'est autre chose qu'une ligne droite, et qui coupe encore la circonférence O″ sous le même angle A que la circonférence C. Or, sans que les angles que fait cette droite avec chacun des cercles O, O′, O″, changent de grandeur, nous pouvons la considérer comme un arc d'une circonférence de cercle infiniment grande qui aurait son centre du côté opposé à celui des centres des circonférences dont elle était primitivement considérée comme la limite. Alors, d'après les conventions que nous avons adoptées sur l'angle de deux circonférences, cette circonférence infinie rencontrera chacun des cercles O, O′, O″, sous des angles respectivement supplémentaires de chacun des précédents. Elle touchera donc chacun des cercles O et O′ en sens inverse du cercle C et coupera le cercle O″ sous un angle B supplémentaire de l'angle A. Par conséquent, le cercle C_1, qui actuellement touche les cercles O et O′ de la même manière que cette circonférence infinie, coupe, comme elle, le cercle O″ sous l'angle B supplémentaire de l'angle A.

IV.

Décrire, d'un rayon donné L, *une circonférence de cercle qui coupe une circonférence donnée* O *sous un angle* A, *et une circonférence* O′ *sous un autre angle* A′.

Soient OB un rayon quelconque du cercle O, et O′B′ un rayon du cercle O′. Menons aux points B et B′ deux droites qui fassent respectivement avec les rayons OB et O′B′ deux angles égaux aux angles

donnés A et A′. Prolongeons ces droites d'une distance égale à L. Appelant E et E′ les extrémités de ces droites ainsi déterminées, décrivons des centres O et O′, avec des rayons respectivement égaux à OE, O′E′, deux circonférences dont les points d'intersection C et C′, pris pour centres, donneront chacun une solution du problème proposé.

Pour voir la raison de cette construction, il suffit d'observer, 1° que l'angle de deux circonférences de cercle est égal à celui de leurs rayons non prolongés; 2° que le lieu géométrique des centres de tous les cercles qui, décrits d'un rayon donné, coupent une circonférence sous un angle donné, est une circonférence de cercle concentrique avec la proposée.

Trois cercles O, O′, O″ *étant donnés, décrire un autre cercle qui les coupe respectivement sous les angles donnés* A, A′, A″.

Décrivez, d'après le problème précédent, un cercle M qui coupe le cercle O sous l'angle A et le cercle O′ sous l'angle A′. Décrivez de même un cercle N qui coupe le cercle O sous l'angle A et le cercle O″ sous l'angle A″. Déterminez, par l'intersection de deux cordes communes, le centre radical P des trois cercles O, O′, M et le centre radical P′ des trois cercles O, O″, N. Menez par le point P les tangentes PE et PF au cercle M. Par les points de contact E et F, menez les rayons ME et MF, que vous prolongerez jusqu'à leur intersection avec la ligne des centres OO′, aux points O et O'_1. Décrivez de ces derniers points comme centres, avec des rayons respectivement égaux à EO_1, FO_1, deux circonférences de cercle. Construisez d'une manière analogue, au moyen des circonférences données O et O″ et du cercle auxiliaire N, les circonférences O_2 et O''_1. Décrivez enfin, par une des constructions connues, une circonférence K qui touche trois quelconques des quatre cercles O_1, O'_1, O_2, O''_1, respectivement de la même manière que chacun d'eux est touché par une des circonférences M et N; et cette circonférence K sera celle qu'il fallait déterminer.

En effet, d'après la construction précédente, le point P est le centre radical des cinq cercles M, O, O′, O_1, O'_1. Donc les quatre cercles O, O′, O_1, O'_1, dont les centres sont sur une même ligne droite, ont tous le même axe radical. Donc, en vertu de la proposition précédente, le cercle demandé devant couper les cercles O et O′ sous les mêmes angles

A et A′ que le cercle M, doit toucher chacun des cercles O_1 et O'_1 de la même manière que le cercle M. Il doit toucher encore, par la même raison, chacun des cercles O_2, O'_1 de la même manière que le cercle N. Or, il n'y a qu'un seul cercle qui puisse toucher à la fois trois cercles donnés, dans un sens donné pour chacun d'eux. Donc le cercle demandé n'est autre chose que le cercle K.

Il devra arriver, comme vérification de la construction précédente, que la circonférence K sera tangente non-seulement à celle des quatre circonférences O_1, O'_1, O_2, O''_1 qui n'aura pas servi à sa détermination, mais encore à deux autres circonférences O'_2, O''_2, enveloppes de tous les cercles qui peuvent couper les deux cercles donnés O′ et O″ sous les angles donnés A′ et A″ : circonférences qu'on obtiendrait de la même manière que les précédentes, au moyen des cercles O′ et O″ et d'une troisième circonférence auxiliaire.

D'après ce qui a été dit dans le scolie du § III, on peut observer encore que la circonférence K′, qui ferait avec chacun des cercles donnés O, O′, O″ des angles respectivement supplémentaires des angles donnés A, A′, A″, toucherait chacun des cercles O_1, O'_1, O''_1, O_2, O'_2, O''_2 en sens inverse du cercle K; et qu'on pourrait, par conséquent, l'obtenir par une simple modification de la construction de ce dernier cercle.

V.

Nous nous occuperons, dans ces derniers paragraphes, de quelques théorèmes déjà connus, pour donner des démonstrations qui nous paraissent nouvelles, et pour compléter l'ensemble des propositions de ce Mémoire.

Un cercle étant tracé sur la surface d'une sphère, sa projection sur la même surface relativement à un point quelconque de l'espace, pris pour centre de projection, est elle-même une circonférence de cercle.

En effet, soient A la circonférence proposée sur la sphère S, A′ la courbe qui en est la projection sur la même sphère relativement à un point P de l'espace. Comme trois points suffisent pour déterminer une circonférence de cercle, la démonstration du théorème proposé revient à prouver que quatre points a', b', c', d', pris à volonté sur la

courbe A′, sont toujours sur une même circonférence de cercle. Soient a, b, c, d les points de la circonférence A dont ils sont les projections. Suivant les rayons projetants Paa', Pbb', Pcc', Pdd', pris consécutivement deux à deux, faisons passer un plan. Les quatre plans ainsi obtenus couperont la sphère S suivant quatre circonférences de cercle $aba'b'$, $bcb'c'$, $cdc'd'$, $dad'a'$, qui se couperont consécutivement deux à deux aux quatre points a, b, c, d, situés sur une même circonférence A. Donc, d'après une proposition du § Ier de la deuxième partie de ce Mémoire, les quatre points d'intersection a', b', c', d', respectivement symétriques des précédents, sont sur une autre circonférence de cercle. Donc la courbe A′ est elle-même une circonférence de cercle.

Si l'on mène deux cônes tangents à une sphère suivant les deux circonférences de cercle A *et* A′ *qui sont la projection l'une de l'autre par rapport à un point* P *de l'espace, les sommets* C *et* C′ *de ces deux cônes seront en ligne droite avec le point* P.

En effet, conduisons un plan suivant les deux rayons de la sphère qui passent respectivement par les centres des cercles A et A′. Ce plan, qui divisera la figure dont il s'agit en deux parties symétriques, contiendra les sommets C, C′ et P. Son intersection avec la même figure sera une circonférence de cercle coupée par deux sécantes Paa', Pbb' et deux couples de tangentes menées aux points d'intersection a et b, a' et b'. Soit d le point d'intersection de la tangente menée au point a avec la tangente au point b. Soit encore d' le point d'intersection des deux tangentes menées aux points a' et b'; il nous suffit de démontrer que la droite qui joint les points d et d' passe par le point P. Menons par le point d deux droites de et df respectivement parallèles aux droites $d'a'$ et $d'b'$, jusqu'à leur intersection avec les sécantes Paa', Pbb' aux points e et f. Je dis que ces nouvelles droites sont égales entre elles. En effet, les angles formés par chacune des sécantes Paa', Pbb' avec les deux droites de, df, et leurs parallèles $d'a'$, $d'b'$, sont égaux deux à deux, comme correspondants. Mais ces sécantes Paa', Pbb' font respectivement avec les tangentes da et db les mêmes angles qu'avec les tangentes $d'a'$, $d'b'$. Donc chacun des triangles dae, dbf est isocèle. Or, les tangentes da et db sont égales. Donc, $de = df$. Par conséquent, les deux droites de, df étant entre elles dans le même rapport que les tangentes $d'a'$, $d'b'$,

qui leur sont parallèles, il est évident que les trois droites aa', bb', dd' se coupent en un même point P.

Tout angle A *tracé sur la surface d'une sphère a pour projection, sur la même surface, relativement à un point quelconque de l'espace pris pour origine des rayons visuels, un angle* A' *qui lui est égal.*

En effet, par le rayon projetant qui passe par le sommet de l'angle A, on peut faire passer deux plans qui contiennent respectivement les tangentes menées aux côtés de cet angle. Ces plans couperont la sphère suivant deux circonférences qui seront respectivement tangentes aux côtés correspondants des angles A et A'. Elles feront donc entre elles les mêmes angles A et A', qui seront alors évidemment égaux comme symétriques.

VI.

Si par un des centres de similitude de deux sphères on fait sur la surface d'une de ces sphères V' *la projection antihomologue d'une figure tracée sur la surface de l'autre sphère* V : 1° *la projection* A' *d'un cercle* B *sera elle-même un cercle;* 2° *le sommet du cône circonscrit à la sphère* V' *suivant la circonférence* A' *sera sur une même droite avec le sommet du cône circonscrit à la sphère* V *suivant la circonférence* B, *et avec le point* P, *origine des rayons visuels;* 3° *tout angle tracé sur la sphère* V *aura pour projection sur la sphère* V' *un angle qui lui sera égal.*

En effet, d'après les propriétés principales des centres de similitude, 1° il est évident que la projection homologue du cercle B tracé sur la surface V sera une courbe B' semblable à B : ce sera donc une circonférence de cercle; 2° le cône circonscrit à la sphère V', suivant le cercle B', et le cône circonscrit à la sphère V, suivant le cercle B, sont deux figures semblables et semblablement placées; et, par conséquent, leurs sommets sont en ligne droite avec le centre de similitude; 3° la projection homologue d'un angle tracé par la sphère V est sur la sphère V' un angle égal au premier. Donc, en ayant égard aux théorèmes du paragraphe précédent, on voit, 1° que la projection antihomologue d'un cercle B tracé sur la sphère V est, sur la sphère V', un cercle A'; 2° que les sommets des cônes circonscrits aux sphères V

et V′ suivant les circonférences antihomologues B et A′ sont en ligne droite avec l'origine P des rayons visuels; 3° que la projection antihomologue d'un angle quelconque tracé sur la sphère V est sur la sphère V′ un angle égal.

Corollaire. Si une des sphères V′ et V, devenant infinie, se réduit à un plan, ses deux centres de similitude relatifs à l'autre sphère sont les deux points où la perpendiculaire menée à ce plan par le centre de la seconde sphère en perce la surface. Comme les propriétés précédentes ne cessent pas d'avoir lieu, on en déduit les trois principes analogues de la projection stéréographique, principes qui se trouvent ainsi démontrés pour le cas général où le plan de projection ne passe point par le centre de la sphère, comme pour celui où il contient ce centre, et qu'on prend ordinairement pour plan de projection stéréographique.

VII.

Deux cercles étant tracés sur une même sphère, le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener des arcs de cercle qui leur soient tangents et qui terminés au point de contact soient égaux entre eux deux à deux, est la circonférence d'un grand cercle perpendiculaire à celle qui passe par les centres des deux cercles donnés.

Faisons passer un plan par chacun de ces cercles. Les deux plans ainsi obtenus se couperont suivant une droite D qui sera l'axe radical de ces deux cercles, puisque les tangentes menées à chacun d'eux par un point quelconque de cette droite D, seront aussi tangentes à la sphère, et, par conséquent, égales entre elles. Faisons passer un plan par le centre de la sphère et par la droite D. Ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle d, qui sera perpendiculaire à celui qui joint les centres M et N; car, chacun des plans conduits suivant les cercles M et N étant perpendiculaire à celui qui contient leurs centres et le centre de la sphère, la droite D de leur intersection est aussi perpendiculaire à ce plan. Donc le grand cercle d, dont le plan passe par cette droite, est perpendiculaire au grand cercle qui joint les centres M et N.

Je dis, de plus, que ce grand cercle d est l'axe radical des cercles M et N. En effet, il est évident qu'on peut mener par un point quelconque a de la circonférence d deux arcs de grand cercle qui soient

respectivement tangents aux circonférences M et N. Or, les plans de ces grands cercles coupent les plans des cercles M et N suivant deux droites qui sont respectivement tangentes à ces cercles, et qui, se coupant en un point A de la droite D, sont, par conséquent, égales entre elles. Donc les deux arcs de grand cercle qui se coupent au point a, et qui ont pour tangentes trigonométriques les droites dont nous venons de parler, sont aussi égaux entre eux. Donc la circonférence rl est l'axe radical des cercles M et N.

Trois cercles étant donnés sur la surface d'une sphère, ou bien on ne peut mener qu'un seul cercle qui les coupe tous trois orthogonalement, ou bien on peut en mener une infinité; et, dans ce cas, les trois cercles ont le même axe radical.

En effet, le centre du cercle orthogonal aux trois cercles M, N, L devant appartenir à l'axe radical des cercles M et N, et devant se trouver encore sur l'axe radical des cercles M et L, ne peut être qu'un des points a et a' d'intersection de ces deux grands cercles; et ces points sont ses deux pôles. Donc, à moins que les trois cercles M, N, L n'aient le même axe radical, on ne peut mener qu'un seul cercle qui les coupe tous trois orthogonalement. Cette proposition est encore évidemment vraie sur un plan.

Corollaire. *Lorsque trois cercles tracés sur une surface sphérique γ ont le même axe radical, les trois cercles qui sont sur un plan leur projection stéréographique y ont aussi le même axe radical, et réciproquement.*

Ce corollaire, joint aux autres principes de la projection stéréographique, prouve que tous les théorèmes et toutes les solutions des §§ I, II, III et IV sont encore vrais sur la surface de la sphère.

VIII.

Lorsqu'une suite de sphères S, S′, S″ *est telle que chacune d'elles coupe une sphère donnée* O *sous un angle dièdre* A, *et une sphère* O′ *sous un autre angle* A′, *toute sphère* O″ *qui aura même plan radical avec les sphères* O *et* O′ *coupera sous un même angle* A″ *toutes les sphères de la suite* S, S′, S″.

En effet, sans que l'angle que fait chacune de ces sphères S, S′, S′

change de grandeur, on peut les amener à avoir leurs centres sur un même plan passant par la droite O, O′, O″. Alors ce plan les coupe suivant des circonférences de cercle qui forment, à leur intersection, deux à deux, des angles plans qui sont la mesure des angles dièdres formés par les sphères qui leur correspondent. Par conséquent, la démonstration proposée se trouve ramenée à celle que nous avons déjà donnée du théorème analogue dans le § III.

On peut aussi en déduire les corollaires analogues.

IX.

Construire l'enveloppe de toutes les sphères qui coupent une sphère donnée O *sous un angle* A *et une sphère* O′ *sous un autre angle donné* A′.

Après avoir fait passer un plan par les centres O et O′, la construction des centres et des rayons des sphères qui seront les enveloppes demandées revient à celle qui nous a servi à la solution du second problème du § IV.

Quatre sphères O, O′, O″, O‴ *étant données, construire une cinquième sphère qui les coupe respectivement sous les angles donnés* A, A′, A″, A‴.

Construisez les deux sphères O_1 et O'_1 qui sont les enveloppes de toutes les sphères qui coupent la sphère O sous l'angle A et la sphère O′ sous l'angle A′. Faites la même construction par rapport aux sphères O, O″ et à l'angle A″, et par rapport aux sphères O, O‴ et à l'angle A‴. Ayant obtenu ainsi les sphères O_2 et O''_1, O_3 et O'''_1, vous mènerez par une des constructions connues une sphère qui soit tangente, dans un sens que la construction précédente aura indiqué, à chacune des trois sphères O_1, O_2, O_3 et à une quelconque des trois sphères O'_1, O''_1, O'''_1; et cette sphère, ainsi déterminée, satisfera à l'énoncé.

Non-seulement la sphère trouvée sera tangente aux deux des trois sphères O'_1, O''_1, O'''_1 qui n'aura pas servi à la déterminer, mais encore à six autres qui, deux à deux, se construiraient comme les précédentes. En les désignant par une notation analogue, on voit que la sphère trouvée doit être tangente à chacune des douze sphères O_1, O_2, O_3, O'_1, O'_2, O'_3, O''_1, O''_2, O''_3, O'''_1, O'''_2, O'''_3.

DÉMONSTRATION

D'UNE FORMULE DE M. DIRICHLET;

REMARQUES SUR QUELQUES EXPRESSIONS DU NOMBRE π;

PAR M. LEBESGUE,

Professeur à Bordeaux.

I.

La formule suivante

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n} = \frac{\pi}{p\sqrt{p}} (\Sigma b - \Sigma a),$$

tome IV de ce Journal, page 405, d'où il résulte $\Sigma b > \Sigma a$ (page 406), peut se démontrer ainsi qu'il suit.

Dans cette formule, p est un nombre premier de forme $4q+3$, n un nombre entier positif non divisible par p; de sorte que l'on a $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$ si n est résidu quadratique de p, et $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ si n est non résidu. La somme $\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n}$ s'étend à toutes les valeurs de n, les multiples de p étant seuls exceptés. Les sommes Σb, Σa du second membre sont

$$\Sigma a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{\frac{p-1}{2}}, \quad \Sigma b = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{\frac{p-1}{2}},$$

en représentant par $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ les $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques contenus entre o et p, et par $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{\frac{p-1}{2}}$ les $\frac{p-1}{2}$ non résidus compris entre les mêmes limites; ces non résidus sont, pour le cas de $p = 4q+3$ premier, les mêmes que les nombres $p - a_1$, $p - a_2$, ..., $p - a_{\frac{p-1}{2}}$.

Ceci posé, Euler a démontré la formule

$$A, \qquad \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{px+a} - \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{px+p-a} = \frac{\pi}{p} \cot \frac{a\pi}{p}.$$

(*Introd. in Anal.*, t. I, n° 178, où l'on a changé n en p et m en a). Il faut bien remarquer que dans cette série on doit prendre autant de termes positifs que de termes négatifs. Si l'on met pour a les nombres a_1, $a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$, on aura, en ajoutant membre à membre les équations,

$$\sum \frac{1}{px+a_1} - \sum \frac{1}{px+p-a_1} = \frac{\pi}{p} \cot \frac{a_1\pi}{p}.$$

$$\sum \frac{1}{px+a_2} - \sum \frac{1}{px+p-a_2} = \frac{\pi}{p} \cot \frac{a_2\pi}{p},$$

. . . . . .

$$\sum \frac{1}{px+a_{\frac{p-1}{2}}} - \sum \frac{1}{px+p-a_{\frac{p-1}{2}}} = \frac{\pi}{p} \cot \frac{a_{\frac{p-1}{2}}\pi}{p}.$$

l'équation

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n} = \frac{\pi}{p} \sum \cot a \frac{\pi}{p}.$$

dont le premier membre contient autant de termes positifs que de termes négatifs, en supposant les nombres n rangés par ordre de grandeur. Dans le second membre, a prend les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$, de sorte qu'en posant $\omega = \frac{2\pi}{p}$, il devient $\sum \cot a \frac{\omega}{2}$, dont la valeur est $\frac{\Sigma b - \Sigma a}{\sqrt{p}}$, ainsi que je l'ai montré ailleurs (tome VII de ce Journal, page 143, équation 14). On a donc

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n} = \frac{\pi}{p\sqrt{p}} (\Sigma b - \Sigma a).$$

formule susceptible de généralisation, comme on peut le voir dans le tome XXI du Journal de M. Crelle (*Application de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, par M. Lejeune-Dirichlet).

En général, la différence

$$\sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{px+a} - \sum_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{px+b},$$

où l'on suppose a et b positifs $< p$, et où l'on prend autant de termes positifs que de termes négatifs, peut s'exprimer sous forme finie, comme je le ferai voir dans une autre Note. Ces sortes de différences se présentent dans diverses recherches, notamment dans la détermination du nombre de formes réduites pour un déterminant donné, question très-importante dont la solution se trouve dans le Mémoire de M. Dirichlet cité plus haut.

II.

Au moyen de la formule d'Euler (A), on vérifiera facilement diverses formules, entre autres

$$(a) \qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{4n} - \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{3\pi}{4n} + \frac{1}{5}\operatorname{tang}\frac{5\pi}{4n} - \ldots;$$

on la mettra sous cette forme

$$(b) \qquad \frac{\pi}{4} = A_1 \operatorname{tang}\frac{\pi}{4n} - A_3 \operatorname{tang}\frac{3\pi}{4n} + \ldots + A_{2n-1} \operatorname{tang}\frac{(2n-1)\pi}{4n},$$

en représentant par A_{2i+1} une série qui n'est autre que

$$\sum \frac{1}{4nx-2i+1} - \sum \frac{1}{4nx-4n-(2i+1)} = \frac{\pi}{4n}\cot\frac{(2i+1)\pi}{4n},$$

de sorte que chaque terme du second membre de l'équation (b) se réduisant à $\frac{\pi}{4n}$, l'équation se trouvera satisfaite.

Pour obtenir l'équation (b), on a transposé les termes du second membre de l'équation (a), ce qui n'est permis qu'en supposant convergente la série

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{4n} - \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{5}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4n} - \ldots;$$

alors la transposition peut être supposée faite sur un nombre de termes multiple de $4n$, et aussi grand qu'on voudra.

Voici un autre moyen d'obtenir l'équation (a), de manière à reconnaître immédiatement la convergence du second membre.

Dans les séries

$$(B)\qquad \begin{cases} \frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots, \\ \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots, \end{cases}$$

qui sont convergentes entre o et $\frac{\pi}{2}$, on fera successivement

$$x = \frac{\pi}{2n},\quad x = \frac{2\pi}{2n},\quad x = \frac{3\pi}{2n}, \ldots,\quad x = \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}.$$

Ajoutant terme à terme les équations ainsi obtenues, on trouve, en réduisant au moyen des valeurs connues de

$$\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-1)a \quad \text{et} \quad \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a.$$

les formules

$$(c)\qquad (2n-1)\frac{\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4n} + \frac{1}{3}\cot\frac{3\pi}{4n} + \frac{1}{5}\cot\frac{5\pi}{4n} + \ldots,$$

$$(d)\qquad \frac{n\pi}{4} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{3}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2n} + \frac{1}{5}\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{2n}.$$

Comme les seconds membres sont des séries convergentes, il est permis de retrancher membre à membre et terme à terme; de là l'équation (a), à cause de $\operatorname{tang} a + \cot a = 2\operatorname{cosec} 2a$.

Le calcul relatif à l'équation

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots$$

a été donné dans le Journal de M. Crelle, t. XII, p. 254 et 255. Si le résultat paraît différent, cela tient à ce qu'il peut être simplifié par le moyen de l'équation $\cot a - \cot 2a = \operatorname{cosec} 2a$. Il y a aussi deux fautes d'impression : $\sum_{p=1}^{p=\infty}$ au lieu de $\sum_{p=0}^{p=\infty}$ (page 255, ligne 8), et $+\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots\right) = \frac{\pi}{8}\right]$ au lieu de $-\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \ldots\right) = \frac{\pi}{8}\right]$ (ligne 9).

Voici les formules nécessaires pour les réductions :

$$A = \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-1)a = \frac{1}{2}\left[(1-\cos na)\cot\frac{a}{2} - \sin na\right].$$

$$B = \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a = \frac{1}{2}\left[\sin na \cot\frac{a}{2} - (1-\cos na)\right].$$

qui donnent pour

$$a = (4k+1)\frac{\pi}{4n}, \quad A = B = \frac{1}{2}\left[\cot(4k+1)\frac{\pi}{4n} - 1\right].$$

$$a = (4k+3)\frac{\pi}{4n}, \quad A = -B = \frac{1}{2}\left[\cot(4k+3)\frac{\pi}{4n} - 1\right].$$

$$a = (4k-2)\frac{\pi}{4n}, \quad A = \cot(4k-2)\frac{\pi}{4n}, \quad B = 0,$$

$$a = (4k+4)\frac{\pi}{4n}, \quad A = 0, \quad B = -1.$$

Quant au calcul numérique de π, les séries (a), (c), (d) ne paraissent avoir aucun avantage sur les séries (B). Il est possible que ces formules (a), (c), (d) soient utiles dans quelques cas particuliers; je les donne donc ici, ignorant si elles ont déjà été données.

NOTE

Sur l'évaluation de l'aire de la surface nommée, dans l'optique, surface d'élasticité ;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. Soit une surface donnée par le système des équations

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

et l'on sait que son aire superficielle s'exprimera par l'intégrale double

$$S = \iint \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\, du\, dv,$$

où

$$\xi = \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}, \quad \eta = \frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}, \quad \zeta = \frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}$$

(voir LACROIX, *Traité de calcul différentiel et intégral*, tome II, n° 774). Cela posé, supposons qu'on transforme x, y, z en coordonnées polaires ordinaires R, θ, ψ pour trois dimensions, ce qui donnera

$$x = R \sin\theta \cos\psi, \quad y = R \sin\theta \sin\psi, \quad z = R \cos\theta,$$

d'où l'on déduit, en regardant θ et ψ comme des variables indépendantes, dont R est une fonction,

$$\xi = R \sin\theta \left(R \cos\theta + \sin\theta \frac{dR}{d\theta}\right),$$

$$\eta = -R \cos\psi \frac{dR}{d\psi} + R \sin\theta \sin\psi \left(R \sin\theta - \cos\theta \frac{dR}{d\theta}\right),$$

$$\zeta = R \sin\psi \frac{dR}{d\psi} + R \sin\theta \cos\psi \left(R \sin\theta - \cos\theta \frac{dR}{d\theta}\right),$$

en sorte que

$$(1) \qquad S = \iint \sqrt{\left(R^2 + \frac{dR^2}{d\theta^2}\right) \sin^2\theta + \frac{dR^2}{d\psi^2}}\, R\, d\theta\, d\psi.$$

2. L'expression pour S, qu'on vient de donner, conduit facilement à une formule simple pour l'aire d'une surface, qui est lieu géométrique des projections orthogonales d'un point fixe sur les plans tangents à une surface donnée.

En effet, soient θ_1, ψ_1 les angles qui déterminent la position d'une perpendiculaire R_1, abaissée du point fixe sur un plan tangent quelconque à la surface donnée. On aura donc, x, y, z étant les coordonnées du point de contact sur cette dernière,

$$R_1 = x \sin\theta_1 \cos\psi_1 + y \sin\theta_1 \sin\psi_1 + z \cos\theta_1,$$

et, par la différentiation, en se rappelant que

$$\sin\theta_1 \cos\psi_1\, dx + \sin\theta_1 \sin\psi_1\, dy + \cos\theta_1\, dz = 0,$$

on trouve

$$\frac{dR_1}{d\theta_1} = (x \cos\psi_1 + y \sin\psi_1) \cos\theta_1 - z \sin\theta_1,$$

$$\frac{dR_1}{d\psi_1} = -(x \sin\psi_1 - y \cos\psi_1) \sin\theta_1.$$

Donc

$$R_1^2 + \frac{dR_1^2}{d\theta_1^2} + \frac{1}{\sin^2\theta_1} \frac{dR_1^2}{d\psi_1^2} = x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

R étant le rayon vecteur au point de contact sur la surface donnée. En comparant cette équation avec l'équation (1), on verra que l'aire S_1 de la surface qui se dérive de la surface donnée par la construction dont il s'agit, s'exprimera par la formule très-simple

$$S_1 = \int\int RR_1 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1 \text{ [*]}.$$

3. Pour faire application de cette formule, nous supposerons que

[*] Semblablement, si l'on désigne par r et ω le rayon vecteur mené d'un point donné à un point quelconque sur une courbe et l'angle que fait la normale à l'extrémité de r avec un axe fixe, l'arc de la courbe, lieu des projections orthogonales du point fixe sur les tangentes de la courbe donnée, se trouvera exprimé par l'intégrale $\int r d\omega$; équation dont j'ai déjà fait usage pour démontrer par la méthode des infiniment petits une propriété des arcs d'une suite de courbes, dérivées d'une hyperbole équilatère. *Voyez* le tome X de ce Journal, page 192.

la surface donnée soit un ellipsoïde, dont le centre est au point ou origine fixe. La surface dérivée sera donc celle employée par Fresnel dans ses recherches sur l'optique, et nommée par cet illustre géometre et physicien *surface d'élasticité*.

Pour obtenir la valeur de son aire, on n'a qu'à exprimer le rayon vecteur à un point quelconque d'un ellipsoïde, par les angles faits par la normale à son extrémité avec les axes de la surface.

Ceci s'effectue aisément : car, soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque sur un ellipsoïde dont les demi-axes sont a, b, c, et soient λ, μ, ν les angles faits par la normale au point (x, y, z) avec les axes. On a donc

$$x = \frac{a^2 \cos\lambda}{R_1}, \quad y = \frac{b^2 \cos\mu}{R}, \quad z = \frac{c^2 \cos\nu}{R},$$

et, par conséquent,

$$RR_1 = \sqrt{a^4 \cos^2\lambda + b^4 \cos^2\mu + c^4 \cos^2\nu},$$

d'où l'on trouve, en mettant pour λ, μ, ν leurs valeurs en θ_1, ψ_1, l'aire S_1 de la surface d'élasticité donnée par la formule

$$S_1 = \iint \sqrt{a^4 \cos^2\theta_1 + (b^4 \sin^2\psi_1 + c^4 \cos^2\psi_1) \sin^2\theta_1}\, \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1.$$

On obtiendra la huitième partie de la surface totale en prenant chacune des variables depuis o jusqu'à $\frac{\pi}{2}$.

Maintenant, si l'on considère l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

et si l'on fait

$$x = \alpha \cos\theta, \quad y = \beta \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \gamma \sin\theta \cos\varphi,$$

on en déduira, pour la huitième partie de sa surface totale, l'intégrale double définie

$$(2) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\beta^2\gamma^2 \cos\theta + \alpha^2 (\beta^2 \cos^2\varphi + \gamma^2 \sin^2\varphi) \sin^2\theta}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Cette expression sera identique avec la valeur de S_1, pourvu qu'on ait

$$\alpha = \frac{bc}{a}, \quad \beta = \frac{ac}{b}, \quad \gamma = \frac{ab}{c},$$

ce qui donne le théorème suivant :

THÉORÈME. *L'aire totale de la surface d'élasticité, qu'on tire d'un ellipsoïde dont les demi-axes sont* a, b, c, *sera égale à l'aire d'un ellipsoïde dont les demi-axes sont* $\frac{bc}{a}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{ab}{c}$.

Il est presque superflu de remarquer que les volumes des deux ellipsoïdes dont il s'agit sont égaux.

4. Parmi les diverses méthodes pour déterminer l'aire ellipsoïdale, qu'on doit aux travaux des géomètres, je ne sais pas si l'on a remarqué celle que je vais indiquer. Elle consiste en ce qu'on ramene l'expression pour l'aire à une intégrale définie connue, évaluée par Legendre.

En effet, si l'on intègre l'expression (2) par rapport à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$, on trouvera

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{P}{\sqrt{Q}} \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{Q}{P}}\right) + \beta\gamma\right] d\varphi,$$

en faisant, pour abréger,

$$P = \alpha^2(\beta^2\cos^2\varphi + \gamma^2\sin^2\varphi).$$
$$Q = \beta^2(\alpha^2 - \gamma^2)\cos^2\varphi + \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2)\sin^2\varphi.$$

Pour transformer cette expression, nous prendrons un nouvel angle ω, tel que

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{Q}{P}},$$

ce qui donne, pour la valeur de S, après toutes les réductions convenables,

$$S = \frac{1}{2}\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2}\int_\nu^\mu \frac{\omega}{\cos^2\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{\sin^2\mu - \sin^2\omega}\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\nu}} + \frac{\pi}{4}\beta\gamma,$$

ou

$$\sin^2\mu = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}, \quad \sin^2\nu = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}.$$

Maintenant, Legendre a démontré que

$$\int_{\nu}^{\mu} \frac{\omega}{\cos^2\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\sin^2\mu - \sin^2\omega}\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\nu}} = \frac{\pi(\cos\mu - \cos\nu)}{2\cos^2\nu\cos\mu}$$

$$+ \frac{\pi}{2\cos\nu\sin\mu\cos^2\mu}\left[\cos^2\mu\,\mathrm{F}(c, \mu) + \sin^2\mu\,\mathrm{E}(c, \mu)\right],$$

où

$$c^2 = \frac{\tang^2\mu - \tang^2\nu}{\tang^2\mu}.$$

(*Traité des fonctions elliptiques*, tome I, page 313, la deuxième formule de la case VIII.)

Donc, on a finalement

$$\mathrm{S} = \frac{\pi\gamma^2}{4} + \frac{\pi\alpha\beta}{4\sin\mu}\left[\cos^2\mu\,\mathrm{F}(c, \mu) + \sin^2\mu\,\mathrm{E}(c, \mu)\right],$$

ce qui s'accorde parfaitement avec le résultat de Legendre (tome I, page 359).

5. Nous remarquerons enfin que la méthode la plus simple peut-être d'évaluer l'aire d'ellipsoïde est due à M. Jacobi; cet illustre géomètre présente l'élément de la surface sous une forme rationnelle, en choisissant pour variables les angles qui déterminent la position d'une normale à un point quelconque (Journal de M. Crelle, tome X).

La formule qu'il en tire se déduit immédiatement de l'équation générale, qui a lieu pour une surface quelconque,

$$(3) \qquad \mathrm{S} = \iint \rho_1\rho_2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

dans laquelle ρ_1, ρ_2 désignent les rayons de courbure en un point quelconque, et θ, φ les angles qui fixent la position de la normale. Car, dans l'ellipsoïde, par un théorème de M. Ch. Dupin,

$$\rho_1\rho_2 = \frac{a^2b^2c^2}{p^4},$$

a, b, c étant les demi-axes, et p la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent. Donc

$$\mathrm{S} = a^2b^2c^2 \iint \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{[a^2\cos^2\theta + (b^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi)\sin^2\theta]^2}.$$

ce qui est l'expression trouvée par M. Jacobi. On en trouve encore une autre démonstration, fondée sur des principes géométriques, dans le dernier numéro du *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, par M. Jellett, où le même auteur a donné quelques constructions élégantes par rapport à ce sujet.

Quoique je n'aie vu la formule (3) dans aucun ouvrage, je n'ai pas de doute qu'elle a déjà été donnée; il est très-probable, je crois, que M. Gauss l'a obtenue.

P. S. Il saute aux yeux que l'élément de l'aire de la surface d'élasticité

$$\sqrt{a^4 \cos^2 \varphi_1 + b^4 \cos^2 \psi_1 + c^4 \sin^2 \psi_1 \sin^2 \varphi_1} \sin \varphi_1 \, d\varphi_1 \, d\psi_1$$

sera également celui de l'aire d'une surface, qui est lieu des projections orthogonales du centre d'un hyperboloïde (à une ou à deux nappes), ayant a, b, c pour demi-axes, sur ses plans tangents. Par conséquent, si l'on conçoit un système d'un ellipsoïde et des hyperboloïdes qui ont les mêmes axes quant à la grandeur et à la direction, et si l'on en tire des surfaces par la construction dont nous avons parlé, un cône quelconque, dont le sommet est placé au centre et qui les coupe suivant des courbes fermées, déterminera sur toutes des portions de même étendue.

La surface (H), dérivée d'un hyperboloïde, aura un point multiple à son centre, et sera enveloppée là par un cône du second degré, *réciproque* au cône asymptotique de l'hyperboloïde auquel elle appartient. Ce cône tangent déterminera sur la surface d'élasticité correspondante une portion égale à l'aire totale de la surface (H).

Comme cas particulier de ce qu'on vient d'énoncer, on verra aisément que, si l'on fait tourner autour de son axe l'ensemble d'une lemniscate, de ses tangentes centrales, et du cercle décrit sur l'axe, la surface engendrée par la révolution de la lemniscate sera égale au petit cercle de la sphère, qui est formé par la révolution des tangentes.

SUR UN THÉORÈME DE M. JOACHIMSTHAL, RELATIF AUX LIGNES DE COURBURE PLANES;

PAR J. LIOUVILLE.

Dans un des derniers cahiers du Journal de M. Crelle (tome XXX, page 347), M. Joachimsthal a démontré le théorème suivant : *Si une ligne de courbure tracée sur une surface est plane, les plans tangents à la surface le long de la ligne de courbure feront tous le même angle avec le plan de cette ligne.* La démonstration de M. Joachimsthal n'exige qu'un calcul très-simple; toutefois, les considérations géométriques mènent au but encore plus facilement, ainsi qu'on va le voir.

Soient MM′, M′M″, M″M‴,... les éléments successifs de la ligne de courbure, que nous supposerons égaux entre eux. Par la propriété fondamentale des lignes de courbure, les normales à la surface menées par les milieux I, I′ de MM′ et M′M″ se coupent en un point C; ce point de rencontre C est évidemment à égale distance des deux éléments égaux MM′, M′M″, et il en est de même du pied O de la perpendiculaire CO abaissée sur le plan MM′M″, en sorte que les droites OI et OI′ sont égales. Les angles CIO, CI′O des normales consécutives IC, I′C avec le plan MM′M″ sont donc égaux entre eux, et, par suite, le sont aussi leurs compléments, c'est-à-dire les angles que les plans tangents consécutifs menés par MM′ et M′M″ font avec le plan MM′M″, plan de la ligne de courbure. Cette égalité d'angles s'étendant de proche en proche à tous les plans tangents qui se succèdent le long de la ligne de courbure, le théorème de M. Joachimsthal est démontré.

Supposons maintenant que la ligne de courbure cesse d'être plane; le théorème de M. Joachimsthal n'aura plus lieu, mais les considérations précédentes prouveront encore que les deux plans tangents consécutifs menés par MM′ et M′M″ font le même angle avec le plan oscu-

lateur MM′M″ que nous regarderons comme appartenant au point M ainsi que le plan tangent mené par MM′. Le second plan osculateur M′M″M‴, qui répond au point M′, coupe le premier suivant la droite M′M″; l'angle que le plan tangent qui passe par cette droite M′M″ fait avec ce nouveau plan osculateur M′M″M‴ diffère donc de celui avec MM′M″, précisément de l'angle compris entre les deux plans osculateurs. Cet angle exprime donc la différence entre l'angle du plan tangent avec le plan osculateur en M et l'angle analogue en M′. Ainsi : *Le long d'une ligne de courbure quelconque, la variation infiniment petite qu'éprouve l'angle compris entre le plan tangent à la surface et le plan osculateur de la courbe, quand on passe d'un point à un autre point infiniment voisin, est toujours égale à l'angle que forment entre eux les plans osculateurs relatifs à ces deux points.*

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DE LA LEMNISCATE ET DES COURBES ELLIPTIQUES DE LA PREMIÈRE CLASSE;

PAR M. J.-A. SERRET.

I.

Une étude plus approfondie des résultats que j'ai publiés dans le tome précédent de ce Recueil, m'a conduit à deux propriétés géométriques remarquables, communes à toutes les courbes elliptiques de la première classe, et qui fournissent, pour ces courbes, un mode uniforme de génération d'une extrême élégance.

Ces propriétés peuvent servir à définir les courbes elliptiques de la première classe, dont la théorie deviendra, dès lors, entièrement indépendante des considérations analytiques qui me les ont fait découvrir.

A ce nouveau point de vue, où je me place, je commence par démontrer, pour la lemniscate, les deux propriétés dont je viens de parler, et la généralisation, comme on le verra, se présentera d'elle-même.

THÉORÈME I. *Soit r le rayon vecteur issu de l'un des foyers d'une lemniscate, dont la demi-distance focale est prise pour unité, et dont le demi-axe sera, dès lors, $\sqrt{2}$; on pourra toujours construire un triangle dont les côtés seront respectivement r, 1 et $\sqrt{2}$, car le rayon vecteur ne varie qu'entre les limites $\sqrt{2}-1$ et $\sqrt{2}+1$: cela posé, si α désigne l'angle de ce triangle opposé au côté $\sqrt{2}$, et β celui qui est*

opposé au côté 1, *l'angle polaire* ζ, *que forme le rayon vecteur de la lemniscate avec l'axe, sera toujours donné par l'équation*

$$\cos\zeta = \cos(\alpha - 2\beta).$$

Remarque [*]. Soient O l'origine, c'est-à-dire l'un des foyers de la lemniscate, et OM un rayon vecteur quelconque; construisons le triangle OMP, de telle sorte que

$$OP = 1 \quad \text{et} \quad MP = \sqrt{2}$$

(ce triangle peut être fait d'un côté ou de l'autre de OM, cela importe peu en ce moment), puis imaginons que le point M décrive d'un mouvement continu la lemniscate entière; le point P, qu'on peut toujours supposer se mouvoir d'un mouvement continu, décrira deux fois la circonférence tracée de l'origine comme centre, avec l'unité comme rayon.

Corollaire. Du théorème précédent, qu'on démontre bien aisément, on déduit la génération suivante de la lemniscate :

Soit OMP *un triangle dont le sommet* O *est fixe, et dont les côtés mobiles* OP *et* MP *sont constamment égaux, l'un à* 1, *l'autre à* $\sqrt{2}$; *si l'on fait varier ce triangle, de telle sorte que le cosinus de l'angle formé par le côté variable* OM *avec une droite fixe, soit constamment égal au cosinus de l'angle* MOP — 2OMP, *le point* M *engendrera une lemniscate dont* O *sera un foyer et la droite fixe l'axe.*

Théorème II. *Soit, comme précédemment,* OM *un rayon vecteur de la lemniscate, et construisons le triangle* OMP, *de part et d'autre de* OM, *la tangente en* M *à la lemniscate passera constamment par le centre du cercle circonscrit à l'un de ces triangles; si, en outre, on considère spécialement celui de ces triangles pour lequel cette propriété a lieu, et qu'en vertu du théorème* I, *on le fasse servir à la description de la lemniscate par un mouvement continu, cette propriété se conservera pour toutes les positions de ce triangle.*

[*] Le lecteur est prié de faire lui-même les figures.

Remarque. Ce théorème donne un moyen très-simple de construire la tangente en un point de la courbe, car il suffira de construire le triangle correspondant à ce point, et de le joindre au centre du cercle circonscrit au triangle; mais il conduit aussi à un nouveau mode de génération pour la lemniscate.

THÉORÈME III. *Soit* OMP *un triangle dont le sommet* O *est fixe, et dont les côtés mobiles* OP *et* MP *sont constamment égaux, l'un à* 1, *l'autre à* $\sqrt{2}$, *le sommet* M *décrira une lemniscate dont* O *sera un foyer, si son déplacement infiniment petit* MM′ *a constamment lieu suivant le rayon* CM *du cercle circonscrit au triangle* OMP.

Remarque. Le triangle dont nous venons de parler joue, comme on le voit, un rôle assez important dans la théorie de la lemniscate; aussi je ne crois pas inutile de mentionner une dernière propriété qui consiste en ce que l'aire de ce triangle et l'aire du secteur de la courbe ont la même différentielle.

II.

La généralisation des propriétés précédentes conduit immédiatement à la théorie complète des courbes elliptiques de la première classe.

Soit n un nombre entier, ou fractionnaire, ou même incommensurable, et construisons le triangle OMP *tel que*

$$\mathrm{OP} = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \mathrm{MP} = \sqrt{n+1},$$

puis imaginons que, le sommet O *restant fixe, le triangle varie de telle sorte que le cosinus de l'angle* θ *formé par le seul côté variable* OM *avec une droite fixe, soit constamment égal au cosinus de l'angle*

$$n.\mathrm{MOP} - (n+1)\,\mathrm{OMP},$$

le point M *engendrera une courbe (algébrique si n est commensurable) dont l'arc sera une fonction elliptique du rayon vecteur, réductible au module* $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, *et les courbes ainsi engendrées ne sont autres que*

celles que j'ai désignées sous le nom de courbes elliptiques de la première classe.

Soient, en effet, MOP $= \alpha$, OMP $= \beta$; l'équation de la courbe résultera de l'élimination de α et β entre

$$\cos\theta = \cos[n\alpha - (n+1)\beta],$$

$$\cos\alpha = \frac{r^2 - 1}{2r\sqrt{n}},$$

$$\cos\beta = \frac{r^2 + 1}{2r\sqrt{n+1}}.$$

De ces deux dernières on déduit

$$\sin\alpha = \frac{\Delta}{2r\sqrt{n}},$$

$$\sin\beta = \frac{\Delta}{2r\sqrt{n+1}},$$

en faisant, pour abréger,

$$\Delta = \sqrt{-r^4 + 2(2n+1)r^2 - 1}.$$

Cela posé, on trouve, par la différentiation,

$$\pm d\theta = n\,d\alpha - (n+1)\,d\beta,$$

$$d\alpha = -\frac{r^2+1}{\Delta}\frac{dr}{r},$$

$$d\beta = -\frac{r^2-1}{\Delta}\frac{dr}{r};$$

d'où

$$\pm d\theta = \frac{r^2 - (2n+1)}{\Delta}\frac{dr}{r},$$

et, par suite, on aura, pour la différentielle de l'arc,

$$\pm ds = 2\sqrt{n(n+1)}\,\frac{dr}{\Delta}.$$

Des équations précédentes on déduit encore les formules suivantes,

qu'il convient de remarquer :

$$\mp ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\cos\beta}.$$

$$\mp ds = \sqrt{n+1}\,\frac{d\theta}{\cos\alpha}.$$

On a d'ailleurs, en posant $k = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

$$\sin\beta = k\sin\alpha,$$

d'où

$$\cos\beta = \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}:$$

donc, en supposant que l'arc croisse en même temps que α,

$$ds = \sqrt{n}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}},$$

et l'arc, compté à partir du point de l'axe polaire qui correspond à $\alpha = 0$, ou $r = \sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$, sera exprimé par l'intégrale elliptique de module k et d'amplitude α,

$$\sqrt{n}\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}.$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

On voit aisément que, dans le cas de $n = 1$, la courbe dont nous parlons se confond avec la lemniscate de Bernoulli, et l'on a ainsi la démonstration du théorème I du § I.

L'aire du triangle générateur OMP est $\frac{\lambda}{4}$, et l'on trouve, d'ailleurs, aisément

$$\int \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{\lambda}{4} + \text{constante}.$$

d'où l'on conclut que l'aire du secteur de courbe, comptée à partir de l'axe polaire, est toujours égale à l'aire du triangle générateur.

Je passe maintenant à l'examen de la seconde propriété de ces

courbes remarquables. On a, dans le triangle OMP,

$$r^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\cos(\alpha + \beta),$$

d'où

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{r^2 - (2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm \frac{r\,d\theta}{ds},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\Delta}{2\sqrt{n(n+1)}} = \pm \frac{dr}{ds},$$

d'où l'on conclut que l'inclinaison de la normale sur le rayon vecteur est précisément égale à $\alpha + \beta$, ou à son supplément; si donc on fait au point M un angle PMN = MOP, en supposant d'abord le premier cas, MN sera la normale au point M de la courbe, lequel correspond à la position OMP du triangle générateur; d'ailleurs le point O se trouve nécessairement sur le segment capable de l'angle PMN, que l'on décrirait sur MP, ce qui montre que MN est tangente au cercle circonscrit au triangle générateur, et si C est le centre du cercle circonscrit, le rayon MC sera précisément la tangente à la courbe. Il est d'ailleurs évident que, quand le triangle décrira la courbe d'un mouvement continu, cette propriété se conservera pour toutes les positions de ce triangle.

On pouvait supposer que l'inclinaison de la normale sur le rayon vecteur fût égale au supplément de $\alpha + \beta$; dans ce cas, on ferait tourner le triangle OMP autour de OM, on aurait un second triangle, qu'on pourrait substituer au premier, sans inconvénient, pour engendrer la courbe, et la propriété précédente serait alors relative à ce nouveau triangle.

De ce qui précède résulte le mode de génération suivant pour les courbes elliptiques :

Si le triangle OMP *varie de telle manière que le sommet* O *reste fixe; et que les côtés mobiles* OP *et* MP, *soient constamment égaux, le premier à* $\sqrt{n}$, *le second à* $\sqrt{n+1}$, *et que, de plus, le déplacement infiniment petit* MM′ *du point* M *ait lieu à chaque instant suivant la droite qui joint ce point au centre du cercle circonscrit au triangle générateur, le point* M *engendrera la courbe elliptique qui correspond au nombre* n.

On a ainsi, en particulier, la démonstration des théoremes II et III du § I, lesquels sont relatifs seulement à la lemniscate.

On obtient aisément l'expression du rayon de courbure. Soit ε l'angle que fait la normale avec l'axe polaire, on aura

$$\varepsilon = \theta - (\alpha + \beta).$$

car $(\alpha + \beta)$ est l'angle de la normale avec le rayon vecteur; on a, en différentiant, l'angle de contingence $d\varepsilon$,

$$d\varepsilon = d\theta - d\alpha - d\beta = \frac{3r^2 - (2n+1)}{\Delta}\frac{dr}{r}.$$

et, pour le rayon de courbure,

$$\frac{ds}{d\varepsilon} = \mathrm{R} = \frac{2r\sqrt{n(n+1)}}{3r^2 - (2n+1)}.$$

SUR L'ÉQUATION $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{y}{(e^t + e^{-t})^2}$;

PAR M. BESGE.

Cette équation a une forme assez remarquable pour qu'il soit peut-être bon de faire observer qu'elle s'intègre à l'aide des fonctions elliptiques.

Posons, en effet,

$$t = \log \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

et prenons, pour variable indépendante, x au lieu de t; en développant les calculs, il viendra

$$x - x^3)\frac{d^2y}{dx^2} + 1 - 3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

C'est précisément l'équation de laquelle dépendent les fonctions elliptiques complètes de première espèce dont le module est x ou $\sqrt{1 - x^2}$. On a donc

$$y = A\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\alpha}} + B\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - (1 - x^2)\sin^2\alpha}},$$

A et B étant deux constantes arbitraires. En changeant t en at ou en $at\sqrt{-1}$, on voit qu'on intégrerait aussi les équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{a^2y}{(e^{at} + e^{-at})^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{a^2y}{4\cos^2 at}.$$

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE,

PAR M. C.-G.-J. JACOBI [*].

« Berlin, le 7 août 1845.

» . . . Les principes dont vous partez pour parvenir aux formules de la transformation inverse que j'ai publiées sans démonstration dans le Journal de M. Crelle, sont précisément les mêmes qui d'abord m'ont conduit à ces formules. Ensuite, j'avais fait une espèce de tour de force en substituant les expressions composées de radicaux compliqués dans l'équation différentielle à laquelle elles doivent satisfaire. Pour mieux faire saisir l'esprit de cette démonstration en quelque sorte synthétique, j'ai employé la même méthode à la démonstration des formules de la transformation directe, dans un Mémoire publié dans le Journal de M. Crelle, tome VI, pages 397 et suivantes. Plus tard, j'ai ajouté une démonstration très-directe et très-élégante qui repose entièrement sur la décomposition de $\frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)}$ en fractions simples, pour laquelle j'avais donné les formules dans une de mes Leçons à l'Université de Kœnigsberg.

» Quant aux formules de développement du produit

$$\mathrm{H}(x+a_1)\,\mathrm{H}(x+a_2\ldots\mathrm{H}(x+a_n),$$

où

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=2jh,$$

et des fonctions homogènes de $\mathrm{H}(x)$ et $\Theta(x)$, je les avais d'abord, comme vous, déduites des propriétés analytiques et caractéristiques

[*] En réponse, comme on peut le voir, à une communication de M. Hermite, relative à la théorie des fonctions elliptiques et à celle des fonctions abéliennes. Nous espérons pouvoir prochainement faire connaître à nos lecteurs la partie du travail de M. Hermite qui concerne les fonctions elliptiques, l'auteur l'ayant developpée séparément dans un Mémoire qu'il doit nous donner. (J. L.)

des fonctions Hx et Θx, et j'y ai fait allusion dans le Journal de M. Crelle, tome XXVI, page 103. Depuis, j'ai remarqué que l'on peut parvenir aux mêmes formules par la considération élémentaire et algébrique, qu'étant mis

$$y_1 = x_1 + b, \quad y_2 = x_2 + b, \quad \text{etc.},$$

à chaque solution des deux équations

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = p, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a,$$

répond une solution des deux autres équations

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = p - \frac{a^2}{n} + n\left(\frac{a}{n} + b\right)^2,$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = a + nb.$$

On mettra pour a les nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$, et pour b tous les nombres, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

» Mais ce qui auparavant ne m'est jamais venu dans l'esprit, c'est votre idée ingénieuse et très-originale de faire ressortir des mêmes principes le théorème d'Abel, quant aux fonctions elliptiques. Ne pensez-vous pas consacrer un Mémoire particulier à cette matière qui se détache très-bien des autres questions?

» En cherchant à tirer aussi la transformation directe des propriétés des fonctions Θ, sans faire usage de leur décomposition en facteurs infinis, vous avez pensé savamment aux cas plus généraux, où probablement l'on se doit résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs.

» Dans mes Leçons universitaires de Kœnigsberg, j'ai aussi eu coutume de partir des fonctions Θ. Dans ces Leçons, en multipliant quatre séries $\sum_{-\infty}^{\infty}{}_i\, e^{-(ax+ib)^2}$ pour différentes valeurs de x, et en transformant les exposants par la formule

$$i^2 + i'^2 - i''^2 - i'''^2 = \left(\frac{i+i'+i''-i}{2}\right)^2 + \left(\frac{i+i'-i''-i}{2}\right)^2 + \text{etc.},$$

j'ai obtenu une formule de laquelle découlent, comme cas particuliers et sans le moindre calcul, les expressions fractionnaires des fonctions elliptiques, les théorèmes sur l'addition des trois especes, et plu-

sieurs centaines de formules intéressantes auxquelles on ne saurait arriver que par un calcul algébrique fatigant. Dans un des premiers volumes du Journal de M. Crelle, j'ai donné les formules d'addition et de transformation conjointes, ressortantes de la multiplication seulement de deux Θ. Ces formules font voir que l'on peut arriver par deux transformations successives, non-seulement à la multiplication, mais aussi aux formules de l'addition.

» Dans les mêmes Leçons, j'ai examiné l'ensemble des transformations de la fonction Θ. En faisant usage de la méthode employée par Lagrange pour la réduction des formes quadratiques, j'ai trouvé le fait analytique remarquable que, q étant une quantité imaginaire quelconque, on peut toujours, et par la seule multiplication par une quantité de la forme $e^{r.xx}$, transformer la fonction Θ dans une autre où le module de q, dans le sens de M. Cauchy, est $< e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$. C'est une limite précise que l'on ne saurait abaisser davantage.

» L'addition des paramètres dans la troisième espèce des intégrales abéliennes et l'échange des paramètres avec les amplitudes me sont bien connues. Il y a douze années environ que je les ai communiquées à deux de mes élèves, M. Richelot, de Kœnigsberg, et M. Senff, à présent professeur de mathématiques près l'Université de Dorpat, et qui étudiait à Kœnigsberg lorsque je fis ces découvertes. J'avais d'abord trouvé, indépendamment, l'addition des paramètres par la seule différentiation de $\log\frac{\sqrt{R}+U\sqrt{x}}{\sqrt{R}-U\sqrt{x}}$, U et R étant deux fonctions de l'ordre m et $2m$. Puis je l'ai déduite de l'échange mutuel des paramètres et amplitudes, qui se trouve aisément en remplaçant la somme des deux intégrales simples

$$\int_0^x \frac{\sqrt{\alpha R(\alpha)}.dx}{(x-\alpha)\sqrt{xR(x)}} + \int_0^\alpha \frac{\sqrt{xR(x)}.d\alpha}{(x-\alpha)\sqrt{\alpha R(\alpha)}},$$

par la double intégrale

$$\iint \frac{d.x\,d\alpha}{\sqrt{\alpha R(\alpha)}\sqrt{xR(x)}}\left[\frac{1}{2(x-\alpha)}\left(\frac{d.xR(x)}{dx}+\frac{d.\alpha R(\alpha)}{d\alpha}\right)+\frac{\alpha R(\alpha)-xR(x)}{(x-\alpha)^2}\right],$$

où l'on prouve sans peine que la fonction de x et de α, placée entre les grands crochets, est entière.

» Feuilletant mes anciens papiers, j'ai trouvé entre autres la démonstration du théorème suivant, qui complète l'analogie avec la troisième espèce des fonctions elliptiques :

» Nommant $F(x)$ l'intégrale $\int \frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{xR(x)}}$, où $\psi(x)$ est une fonction en-
» tière du $(m-1)^{ième}$ degré, si l'on détermine les trois systèmes de
» quantités w_1, w_2, etc., y_1, y_2, etc., z_1, z_2, etc., par les $m+2$ quan-
» tités données $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}, \alpha$, au moyen des équations

$$F(w_1) + F(w_2) + \ldots + F(w_m) = F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_{m+1}),$$
$$F(y_1) + F(y_2) + \ldots + F(y_m) = F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_{m+1}) + F(\alpha),$$
$$F(z_1) - F(z_2) + \ldots + F(z_m) = F(x_1) + F(x_2) + \ldots - F(x_{m+1}) - F(\alpha),$$

» et que l'on mette

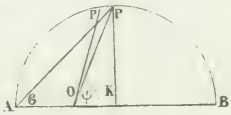
$$\Pi(x) = \sqrt{\alpha R(\alpha)} \int \frac{dx}{(\alpha - x)\sqrt{xR(x)}}.$$

» on aura

$$\Pi(x_1) + \Pi(x_2) - \ldots + \Pi(x_{m+1}) = \Pi(w_1) + \Pi(w_2) - \ldots + \Pi(w_m)$$
$$- \log \frac{1 + (-1)^m \cdot \frac{\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{m+1}}}{\sqrt{\alpha y_1 y_2 \ldots y_m}}}{1 + (-1)^m \cdot \frac{\sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{m+1}}}{\sqrt{\alpha z_1 z_2 \ldots z_m}}}. »$$

Nota. La formule pour l'intégrale la plus simple de la seconde espece est encore parfaitement analogue à celle qui se rapporte à l'addition de la seconde espèce des fonctions elliptiques; c'est ce qu'on voit sans calcul.

Permettez-moi d'ajouter la bagatelle suivante : Soit AB le diamètre



d'un cercle : si l'on mène d'un point P du cercle la droite PK au centre K, l'angle PKB est double de PAB; mais si l'on mène la droite à un autre point fixe O du diamètre, on obtient la transformation de

Landen. Soit R le rayon du cercle, $KO = a$, $PAB = \varepsilon$, $POB = \psi$; variant P, on aura dans le triangle infiniment petit POP,

$$PP \sin PPO = OP.\sin POP;$$

donc

$$2R\,d\varepsilon.\cos KPO = OP.d\psi, \quad \frac{2\,d\varepsilon}{OP} = \frac{d\psi}{R\cos KPO};$$

or

$$OP^2 = R^2 + a^2 + 2Ra\cos 2\varepsilon = (R+a)^2\cos^2\varepsilon + (R-a)^2\sin^2\varepsilon,$$
$$R^2\cos^2 KPO = R^2 - R^2\sin^2 KPO = R^2 - a^2\sin^2\psi;$$

donc

$$\frac{2\,d\varepsilon}{\sqrt{[(R+a)^2\cos^2\varepsilon + (R-a)^2\sin^2\varepsilon]}} = \frac{d\psi}{\sqrt{[(R^2\cos^2\psi + (R^2 - a^2\sin^2\psi]}}.$$

On a, en même temps,

$$\sin\psi = \frac{AP.\sin\varepsilon}{OP} = \frac{2R\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{\sqrt{[(R+a)^2\cos^2\varepsilon + (R-a)^2\sin^2\varepsilon]}},$$

ce qui est la substitution de Landen.

» J'ai aussi cherché à étendre au théoreme d'Abel ma construction de l'addition des fonctions elliptiques. Dans cette dernière, la corde PQ d'un cercle touche constamment un autre cercle. Soit T le point d'in-

tersection de deux positions consécutives de la droite; les deux angles QQT et PPT étant égaux d'après une propriété du cercle, on aura

$$\frac{PP}{PT} = \frac{QQ}{QT},$$

ce qui est l'équation différentielle, dont la construction donne l'integrale complète et algébrique trouvée par Euler. A présent, je suppose qu'une corde C d'une courbe I du $n^{ième}$ degré touche constamment une autre courbe II. Soient P un point d'intersection de la corde mobile avec la courbe I, et $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ l'élément de la courbe I dans ce point, T le point de contact de la corde C avec la courbe II; si

$f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe I, je démontre, par des considérations mixtes de géométrie et d'algèbre, la formule générale

$$\sum \frac{\psi(x, y)\, ds}{\mathrm{PT}\sqrt{\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]}} = 0.$$

$\psi(x, y)$ étant une fonction entière de l'ordre $n - 2$, et la somme s'étendant aux n points d'intersection, le signe du radical étant $+$ ou $-$, selon que P est de l'un ou de l'autre côté de T. Supposons que la courbe I rentre dans ces courbes particulières pour les points desquelles on peut exprimer x et y par des fonctions rationnelles d'une troisième variable t, $x = \frac{\tau_1}{\tau}$, $y = \frac{\tau_2}{\tau}$, τ, τ_1, τ_2 étant du $n^{ième}$ degré, ce qui même est le cas général pour les courbes des deux premiers degrés. Faisant usage de divers théorèmes établis dans mon Mémoire sur l'élimination (Journal de M. Crelle, tome XV), je trouve le théorème remarquable que, $\varepsilon(t)$ étant du $(n - 2)^{ième}$ degré, on aura

$$\frac{\varepsilon(t)}{\tau}\, dt = \frac{\psi(x, y)\, ds}{\sqrt{\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]}}.$$

$\psi(x, y)$ étant, comme ci-dessus, du $(n - 2)^{ième}$ degré. On aura donc

$$\sum \frac{\varepsilon(t)\, dt}{\tau.\mathrm{PT}} = 0.$$

Soit la courbe II un cercle ayant pour équation $x^2 + y^2 = 1$; on aura

$$\tau.\mathrm{PT} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau^2},$$

donc

$$\sum \frac{\varepsilon(t)\, dt}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau^2}} = 0, \quad \text{d'où} \quad \sum \int \frac{\varepsilon(t)\, dt}{\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 - \tau^2}} = 0,$$

les n intégrales étant prises entre les limites correspondantes à deux positions quelconques de la corde mobile C. Soit $\mathrm{f}(t)$ une fonction donnée du $(n - 2m)^{ième}$ degré, U du $m^{ième}$ degré, $\varepsilon(t) = \Psi(t).\mathrm{U}$, $\Psi(t)$ étant du $(n - 2m - 2)^{ième}$ degré, on aura

$$\sum \int \frac{dt\, \Psi(t)}{\sqrt{\mathrm{f}(t)}} = 0, \quad \tau_1^2 - \mathrm{U}^2\, \mathrm{f}(t) = \tau^2 - \tau_2^2.$$

ce qui est la forme donnée par Abel à son théorème; mais la forme sous laquelle le théorème se présente, d'après la construction que je viens de vous communiquer, ne semble pas dépourvue d'intérêt. Comme je n'ai étudié jusqu'ici que les intégrales qui ont sous le signe une racine carrée, je ne saurais dire si la formule générale dont je suis parti en prenant deux courbes quelconques I et II, comporte la même généralité que le théorème général d'Abel. Par vos travaux sur ce théorème, vous serez à même d'en juger.

» Ne soyez pas fâché, monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous commencez là où je finis, il doit y avoir une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre.

» Je ne sais pas si dans les semaines prochaines je trouverai le loisir d'écrire à M. Liouville, pour lui communiquer quelques petites choses qu'il pourrait insérer dans son excellent Journal. Si vous trouvez bon d'y faire entrer quelque extrait de cette Lettre, faites comme vous voudrez... »

Construction des caustiques par réflexion sur les courbes planes, le point lumineux étant dans le plan de la courbe;

PAR M. J.-H. GRILLET.
Élève de l'École normale.

On trouve aisément, comme on sait, pour ce genre de caustiques, la formule

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{R \cos i},$$

dans laquelle p désigne la distance du point lumineux au point d'incidence, p' celle du point d'incidence au point où le rayon réfléchi rencontre la caustique, R le rayon de courbure de la courbe au point d'incidence, et i l'angle d'incidence. La formule est générale si l'on convient de donner les mêmes signes à celles des distances p, p', R qui sont d'un même côté de la tangente à la courbe au point d'incidence, et des signes différents à celles qui sont de côtés différents.

Cette formule conduit à diverses constructions de la caustique par points; la suivante est élégante: peut-être a-t-elle été déjà donnée. Soit P le point lumineux, I le point d'incidence, R le centre de courbure, P' le point où le rayon réfléchi touche la caustique. Pour avoir le point P', on décrit sur IR pris pour diamètre une circonférence qui coupe PI en A. On prend sur cette circonférence RA' = RA, de sorte que IA' est la direction du rayon réfléchi. La droite AA' coupe IR en un point B, et la droite PB coupe IA' au point P'.

Cette construction est tout à fait générale. Pour la vérifier, il suffit de considérer PP' comme une transversale qui coupe les côtés du triangle AIA', et d'égaler le produit de trois segments non consécutifs au produit des trois autres. On retombe alors sur la formule ci-dessus.

Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales; — Et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXII, p. 313 et 517.)

Les deux équations en question sont, d'après les notations employées dans mes précédentes communications,

$$(1) \qquad \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2,$$

$$(2) \qquad \mathrm{PD} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}.$$

J'ai démontré la première équation en la déduisant d'un théorème plus général, relatif à tous les points d'un plan; et j'en ai conclu la seconde au moyen de l'équation

$$(3) \qquad \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = a^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{\mathrm{P}^2 \mathrm{D}^2},$$

relative à une tangente quelconque à une surface du second degré.

Je me propose maintenant :

1°. De donner une nouvelle démonstration, extrêmement simple, de l'équation (1);

2°. De démontrer *directement* l'équation (2);

Et 3°. De faire connaître une nouvelle propriété commune aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure d'une surface du second degré, qui se déduit naturellement de ma nouvelle manière de démontrer l'équation (1), et donne lieu à quelques corollaires intéressants.

Je m'appuierai sur le théorème suivant qui exprime une belle propriété des surfaces du second degré homofocales.

THÉORÈME. *Étant données trois surfaces homofocales* ν, (a), (a′) (*c'est-à-dire dont les demi-axes majeurs sont* ν, a, a′), *si par une tangente quelconque à la première, on mène le plan tangent à cette surface et deux plans tangents aux deux autres surfaces, respectivement, les inclinaisons de ces deux plans sur le premier auront leurs sinus dans un rapport constant, égal à*

$$\frac{\sqrt{\nu^2 - a^2}}{\sqrt{\nu^2 - a'^2}}.$$

Ce théorème est susceptible de plusieurs conséquences que je n'examinerai pas ici; je passe tout de suite à l'objet de cette Note [*].

I. — *Démonstration de l'équation* $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha$.

Concevons la tangente T commune aux deux surfaces (ρ) et (α). Soit m son point de contact sur la surface (ρ); μ et ν sont les paramètres des deux lignes de courbure de cette surface, qui se croisent en ce point, c'est-à-dire les demi-axes majeurs des deux surfaces (μ), (ν) qui déterminent ces deux lignes de courbure. La normale au point m est tangente à la surface (ν); les plans tangents aux deux surfaces (α) et (μ), menés par cette droite, font avec le plan tangent à la surface (ν) deux angles dont le rapport des sinus (d'après le théorème précédent)

---

[*] Ayant donné, dans mon *Aperçu historique* (page 395, art. 43), une proposition qui forme un cas particulier de ce théorème, le cas où la première surface devenant infiniment aplatie se réduit à un plan, j'ai fait remarquer que cette proposition, et une autre, n'avaient pas toute la généralité désirable (*Ibid.*, art. 45); puis, dans une Note à la fin de la partie historique de l'ouvrage (p. 556), j'ai annoncé être parvenu à la généralisation de ces deux propositions, et j'ai énoncé un théorème duquel cette généralisation se déduisait sans peine. Depuis, l'une des deux propositions généralisées a été le fondement d'une théorie géométrique de l'attraction des ellipsoïdes, et particulièrement d'une démonstration directe du théorème de Maclaurin. L'autre, qui est celle que je rappelle ici, est susceptible d'une application également intéressante, puisqu'elle conduit naturellement aux propriétés des lignes géodésiques des surfaces du second degré.

est égal à

$$\frac{\sqrt{\nu^2-\alpha^2}}{\sqrt{\nu^2-\mu^2}}.$$

Or, le second de ces angles est droit; on a donc, en désignant le premier par i',

$$\sin i' = \frac{\sqrt{\nu^2-\alpha^2}}{\sqrt{\nu^2-\mu^2}};$$

d'où

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 (1 - \sin^2 i') = \alpha^2.$$

Le plan tangent à la surface (α) passe par la tangente T, i' est donc l'angle que cette tangente fait avec la ligne de courbure (ν); soit i'' l'angle qu'elle fait avec la seconde ligne de courbure (μ); on aura $\cos i' = \sin i''$, et l'équation devient

$$\mu^2 \sin^2 i' - \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2.$$

C. Q. F. D.

Observations. L'équation $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$ exprime la solution de ce problème : *Déterminer, en un point d'une surface du second degré (ρ), la direction des tangentes à la surface, qui vont toucher une seconde surface homofocale.* Car cette direction est celle que déterminent les angles i' et i'' (lesquels se réduisent à un seul, puisqu'ils sont compléments l'un de l'autre). L'équation donne $\operatorname{tang} i' = \frac{\sqrt{\nu-\alpha}}{\sqrt{\alpha-\mu}}$.

Si maintenant on exprime cet angle i' par le rapport des arcs ds', ds'' des deux lignes de courbure (μ), (ν), qui sont les projections de l'élément mm' de la tangente, comme l'a fait M. Liouville [*], on a $\operatorname{tang} i' = \frac{ds'}{ds''}$; donc $\frac{ds'}{\sqrt{\nu-\alpha^2}} = \frac{ds'}{\sqrt{\alpha^2-\mu^2}}$; ou, en mettant pour ds' et ds' leurs expressions connues [**],

$$\frac{\sqrt{\mu-\rho^2}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2-\alpha^2}\,\sqrt{\mu^2-\varepsilon^2}\,\sqrt{\mu^2-\varepsilon'^2}} = \frac{\sqrt{\nu^2-\rho^2}\,.\,d\nu}{\sqrt{\nu^2-\alpha^2}\,\sqrt{\nu^2-\varepsilon^2}\,\sqrt{\nu^2-\varepsilon'^2}}.$$

---

[*] *Journal de Mathématiques*, t. IX, décembre 1844.

[**] Les expressions de ds' et ds'' se peuvent obtenir très-simplement, et sans calculs, par de seules considérations de Géométrie que j'indiquerai dans un autre moment.

Cette équation différentielle exprime le rapport $\frac{du}{dv}$ qui détermine sur la surface (ρ), à partir d'un point (μ, ν), la direction de l'élément qui, prolongé, ira toucher une seconde surface homofocale (α). Et l'intégrale de cette équation représentera une courbe dont tous les éléments, ou, en d'autres termes, dont toutes les tangentes, iront toucher cette surface (α). Cette courbe sera la ligne géodésique : mais les considérations précédentes étaient nécessaires pour donner une signification géométrique à l'équation différentielle.

On arrive donc avec une extrême facilité, et par une marche naturelle, au beau résultat de M. Jacobi, qui avait pu paraître devoir être plus particulièrement du domaine de l'analyse, puisque c'est par cette méthode que divers géomètres ont traité cette question.

II. — *Démonstration de l'équation* $\mathrm{PD} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}$.

Concevons les deux cylindres circonscrits aux deux surfaces (a), (α), qui ont leurs arêtes parallèles à la tangente T commune à ces deux surfaces. Les bases de ces cylindres sur un même plan perpendiculaire à leurs arêtes sont deux coniques, une ellipse et une hyperbole, décrites des mêmes foyers [*]. Ces deux courbes se croisent au point M où leur plan rencontre la tangente T. La différence des carrés de leurs demi-axes majeurs est égale au carré du demi-diamètre de l'ellipse conjugué à celui qui aboutit au point M [**]. Or, cette différence est égale à la différence des carrés des demi-axes majeurs des deux surfaces, savoir, $(a^2 - \alpha^2)$ [***]. On a donc, en appelant OM_1 le demi-diamètre conjugué à OM, $\mathrm{OM}_1 = \sqrt{a^2 - \alpha^2}$. Le produit $\pi.\mathrm{P.OM}_1$ ex-

[*] *Aperçu historique*, page 392, art. 35.

[**] Cela résulte directement de deux propositions démontrées dans mon *Aperçu historique*, pages 360 et 361; ou bien encore du théorème général dont je me suis servi dans ma première communication. (*Comptes rendus*, t. XXII, page 65.)

[***] Cela résulte de ce théorème général : *Quand deux surfaces sont homofocales, si on leur mène deux plans tangents parallèles entre eux, la différence des carrés des distances de ces deux plans au centre commun des deux surfaces sera constante, quelle que soit leur direction commune.* (*Aperçu historique*, p. 393.)

prime l'aire de l'ellipse; et $2\pi P.D.\sqrt{a^2 - \alpha^2}$ le volume du cylindre qui a pour base l'ellipse, et pour hauteur le diamètre 2D de la surface (a). Ce cylindre est circonscrit à cette surface; conséquemment, son volume est constant et égal à $2\pi abc$. D'où il suit que l'on a

$$PD = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} \text{ [*]}.$$

C. Q. F. D.

III. — *Propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure des surfaces du second degré.*

Du théorème énoncé au commencement de cette Note, et sur lequel est fondée la démonstration de l'équation (1), on conclut la propriété suivante des tangentes communes à deux surfaces homofocales :

Si, par chaque tangente commune à deux surfaces homofocales, on mène un plan faisant avec le plan tangent à la première surface mené par la tangente commune, un angle de grandeur constante, ce plan sera constamment tangent à une même surface homofocale aux proposées.

Les tangentes à une ligne de courbure d'une surface du second degré sont toutes tangentes à une seconde surface homofocale; donc :

Si par chaque point d'une ligne de courbure d'une surface du second degré, on mène un plan tangent à cette courbe, faisant avec la surface, en ce point, un angle de grandeur donnée et constante,

---

[*] Soit Δ le demi-diamètre parallèle à la tangente conjuguée à la tangente T : on a, comme on sait, $PD\,\Delta \sin(D, \Delta) = abc$. Donc, $\Delta \sin(D, \Delta) = \sqrt{a^2 - \alpha^2}$.

Si T est une tangente à la ligne de courbure déterminée sur (a) par la surface (α), l'angle (D, Δ) est droit, et l'on a $\Delta = \sqrt{a^2 - \alpha^2}$. Pareillement, soit (α_1) la surface qui détermine, au même point, la seconde ligne de courbure de la surface (a); on aura $D = \sqrt{a^2 - \alpha_1^2}$. On peut écrire $\alpha^2 = a^2 - \Delta^2$, $\alpha_1^2 = a^2 - D^2$. Ces expressions des demi-axes majeurs des deux surfaces homofocales qui passent par un point d'une surface donnée, résultent encore immédiatement des propriétés de l'ellipse constante considérée dans le théorème général sur lequel repose ma première démonstration de l'équation $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$. (Voir *Comptes rendus*, t. XXII, p. 65.) Du reste, ces expressions se trouvent dans le Mémoire de M. Joachimsthal.

tous ces plans envelopperont une surface du second degré homofocale à la proposée.

Il suit de là que :

Si par les tangentes à une conique décrite dans un plan principal d'une surface du second degré, des mêmes foyers que la focale comprise dans ce plan, on mène des plans tangents à la surface, tous ces plans feront des angles égaux avec le plan principal.

Car la conique peut être considérée comme une ligne de courbure de la surface infiniment aplatie que représente la focale.

Les tangentes à une ligne géodésique d'une surface du second degré sont toutes tangentes à une seconde surface homofocale. Donc :

Si en chaque point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré on mène, par la tangente à la courbe, un plan faisant avec la surface, en ce point, un angle de grandeur donnée et constante, tous ces plans envelopperont une seconde surface du second degré homofocale à la proposée.

Cette surface sera la même pour toutes les lignes géodésiques dont les équations auront la même constante α.

Soit une surface de révolution autour de son axe majeur, ayant par conséquent deux foyers. Ces deux foyers peuvent être considérés comme les sommets d'une surface homofocale à la proposée, et qui, ayant deux axes nuls, se réduit à une ligne droite. Conséquemment, tout plan mené par l'un des foyers est un plan tangent à la surface. D'après cela, on conclut du théorème précédent que :

Une ligne géodésique tracée sur un ellipsoïde, ou un hyperboloïde à deux nappes, de révolution autour de l'axe majeur, jouit de la propriété, que le cône qui passe par cette courbe, et qui a son sommet en l'un des deux foyers de la surface, coupe la surface partout sous le même angle.

Cette propriété est caractéristique et peut servir à définir les lignes géodésiques sur les deux surfaces de révolution.

Autre démonstration de l'équation $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$ [*], *et propriétés qui en dérivent.*

(Séance du 23 mars 1846.)

Cette nouvelle démonstration repose sur une propriété des surfaces homofocales, dont voici l'énoncé :

THÉORÈME. *Étant donnée une surface du second degré* (α), *si par un point de l'espace on mène une droite faisant, avec les normales aux trois surfaces homofocales* (ρ), (μ) *et* (ν) *qui passent par ce point, des angles* i, i', i'', *le segment* EE′, *que la surface* (α) *intercepte sur cette droite, divisé par le carré du demi-diamètre* Oe, *qui lui est parallèle, a pour expression*

$$\frac{EE'}{Oe^2} = \frac{2\sqrt{(\alpha^2-\rho^2)(\alpha^2-\mu^2)(\alpha^2-\nu^2)}}{\alpha\beta\gamma}\sqrt{\frac{\cos^2 i}{\rho^2-\alpha^2}+\frac{\cos^2 i'}{\mu^2-\alpha^2}+\frac{\cos^2 i''}{\nu^2-\alpha^2}},$$

α, β, γ *étant les trois demi-axes principaux de la surface* (α) [**].

Ce théoreme fournit immédiatement la démonstration de l'équation proposée, et conduit ensuite à une propriété des tangentes communes à deux surfaces homofocales, concernant les segments qu'une troisieme surface homofocale détermine sur ces tangentes; et cette propriété s'applique naturellement aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure des surfaces du second degré.

I. — *Démonstration de l'équation* $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$.

Concevons, dans le théorème ci-dessus, que la transversale menée par le point (ρ, μ, ν) soit tangente à la surface (α), on aura $EE' = 0$, et

$$\frac{\cos^2 i}{\rho^2-\alpha^2}+\frac{\cos^2 i'}{\mu^2-\alpha^2}+\frac{\cos^2 i''}{\nu^2-\alpha^2} = 0.$$

---

[*] Voir pages 5 et 105 de ce volume.

[**] Ce théorème se trouve démontré dans mon *Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes*, présenté à l'Académie des Sciences, le 11 décembre 1837, et inséré dans le tome IX du *Recueil des Savants étrangers*. Voir pages 659 et 661.

Cette équation peut être considérée comme l'équation du cône circonscrit à la surface (α), qui aurait son sommet au point (ρ, μ, ν), puisqu'elle détermine toutes les tangentes à cette surface, qu'on peut mener par ce point.

Pour celles de ces tangentes qui sont comprises dans le plan tangent à la surface (ρ) et qui, dès lors, se trouvent tangentes à la fois aux deux surfaces (α) et (ρ), on a $i = 90^\circ$, $\cos i = 0$, et

$$\frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha^2} = 0;$$

ou

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = 0.$$

C. Q. F. D.

Remarque. Une droite dans l'espace sera représentée par les deux équations

$$\frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i'}{\nu^2 - \alpha^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \alpha_1^2} + \frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha_1^2} = 0,$$

qui expriment que la droite est menée par le point (ρ, μ, ν), tangentiellement aux deux surfaces (α) et (α_1).

Ces équations se transforment en deux équations différentielles, où ρ, μ, ν sont les variables, si l'on remplace les cosinus par les projections ds, ds', ds'' d'un élément de la droite, sur les normales aux trois surfaces (ρ), (μ), (ν), puis ces éléments ds, ds', ds' par leurs expressions connues, en ρ, μ, ν, $d\rho$, $d\mu$, $d\nu$.

II. — *Propriété générale des tangentes communes à deux surfaces homofocales.*

L'équation $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$ détermine donc, sur le plan tangent à la surface (ρ), la direction d'une tangente commune aux deux surfaces (ρ) et (α). Concevons une troisième surface homofocale (α_1) ; soit $E_1 E'_1$ le segment qu'elle intercepte sur cette tangente, et nommons Oe, son demi-diamètre parallèle à cette droite, on aura

$$\frac{E_1 E'_1}{Oe} = \frac{2\sqrt{\alpha^2 - \rho^2 \quad \alpha^2 - \mu^2 \quad \alpha_1^2 - \nu^2}}{\alpha \rho \mu \nu} \sqrt{\frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i}{\nu^2 - \alpha^2}}.$$

Or

$$\cos^2 i' = \frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \nu^2} \quad \text{et} \quad \cos^2 i'' = \frac{\nu^2 - \alpha^2}{\nu^2 - \mu^2},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha_1^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha_2^2} = \frac{\alpha^2 - \alpha_1^2}{(\mu^2 - \alpha_1^2)(\nu^2 - \alpha_1^2)};$$

il vient donc

$$\frac{E_1 E'_1}{\overline{Oe_1}^2} = \frac{2\sqrt{\alpha_1^2 - \rho^2}\sqrt{\alpha^2 - \alpha_1^2}}{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1}.$$

Le second membre, ne contenant plus μ et ν, est indépendant de la position du point (μ, ν) sur la surface (ρ). Ainsi l'équation exprime ce théorème général :

Théorème. *Les tangentes communes à deux surfaces homofocales jouissent de la propriété, que, les segments qu'une troisième surface homofocale intercepte sur ces droites sont proportionnels aux carrés des demi-diamètres de cette surface qui leur sont parallèles.*

III. — *Corollaires du théorème précédent.*

Les tangentes communes aux deux surfaces (ρ) et (α) peuvent les toucher en des points de leur ligne d'intersection, laquelle est une ligne de courbure sur chacune des deux surfaces. On en conclut donc que :

Si l'on conçoit les tangentes à une ligne de courbure d'une surface du second degré, une seconde surface homofocale interceptera sur ces tangentes des segments proportionnels aux carrés de ses demi-diamètres parallèles à ces tangentes, respectivement [*].

Que la ligne de courbure soit une section principale de la surface, on en conclut cette propriété des coniques homofocales, savoir que :

Les cordes d'une conique, qui, divisées par les carrés des diamètres parallèles, donnent des quotients égaux, enveloppent une seconde conique homofocale à la première.

---

[*] J'étais déjà parvenu à ce théorème dans le Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes, cité précédemment. (Voir *Recueil des Savants étrangers*, tome IX, page 668.)

La seconde conique peut avoir son petit axe nul et se réduire à l'excentricité de la première; donc :

Dans une conique, les cordes qui passent par un foyer sont proportionnelles aux carrés des diamètres qui leur sont parallèles.

Que les deux surfaces (ρ), (α) soient les deux focales de la surface (α_1); toute droite qui s'appuie sur ces deux courbes peut être considérée comme une tangente commune aux deux surfaces qu'elles représentent. On a donc cette propriété des deux focales d'une surface du second degré, savoir, que : *Toute corde de la surface, qui s'appuie sur ces deux courbes, a sa longueur proportionnelle au carré du diamètre de la surface parallèle à cette corde.*

Les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré sont tangentes à une seconde surface homofocale; donc :

Les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré jouissent de la propriété, qu'une surface homofocale quelconque intercepte sur ces droites des segments proportionnels aux carrés de ses diamètres parallèles à ces droites.

Considérons un hyperboloïde à une nappe; chacune de ses génératrices est une ligne géodésique, les tangentes à cette ligne se confondent avec la génératrice elle-même, et la surface homofocale que ces tangentes vont toucher, d'après le théorème général sur les lignes géodésiques, est l'hyperboloïde lui-même. Ce qu'on reconnaît aisément, en vérifiant que, pour déterminer sur un hyperboloïde (ρ) ses génératrices, il faut faire $\alpha = \rho$ dans l'équation générale des lignes géodésiques

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2.$$

Ainsi, nous pouvons considérer les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, comme les tangentes à des lignes géodésiques d'un même système, c'est-à-dire qui admettent la même constante α, qui ici est égale à ρ. On conclut donc du théorème précédent, que :

Étant donné un hyperboloïde à une nappe, si l'on décrit une surface homofocale (ellipsoïde, ou hyperboloïde à deux nappes), les segments qu'elle interceptera sur les génératrices de l'hyperboloïde seront proportionnels aux carrés des diamètres de cette surface, parallèles à ces génératrices.

Si dans l'équation intégrale de la ligne géodésique on suppose $\alpha = \rho$,

elle se simplifie et devient

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - \varepsilon^2)(\mu - \varepsilon_1^2)}} = \int \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - \varepsilon^2)(\nu^2 - \varepsilon_1^2)}} + C.$$

Ainsi les génératrices de l'hyperboloïde à une nappe s'expriment par une équation en fonctions elliptiques, de même que les tangentes à une conique sur le plan.

Cela forme un troisième cas où l'équation de la ligne géodésique se ramène aux fonctions elliptiques.

Le rapport $\frac{\overline{Oe}^2}{EE'}$, dans les théorèmes qui précèdent, peut se remplacer par un seul segment formé sur la corde EE'; de sorte que les théorèmes prendront de nouveaux énoncés dans lesquels ce seront des segments égaux que l'on aura à considérer. En effet, concevons que la surface (α) soit l'enveloppe d'une couche infiniment mince qui ait pour paroi interne une surface semblable, concentrique et semblablement placée; soient EE' une corde de la surface (α), Oe le demi-diamètre parallèle, et dr le segment infiniment petit compris sur cette corde, entre les deux parois de la couche; on trouve aisément cette expression de dr.

$$dr = 2\,\frac{\overline{Oe}^2}{EE'}\,\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Donc, quand le rapport $\frac{EE'}{\overline{Oe}^2}$ sera constant, comme dans les théorèmes précédents, le segment dr sera de longueur constante. On conclut de là plusieurs théorèmes dont nous ne citerons que celui-ci, qui se rapporte au plan :

Si entre deux coniques semblables, concentriques et semblablement placées, et dont la différence des axes est infiniment petite, on inscrit des segments infiniment petits, mais de même longueur, ces segments prolongés envelopperont une conique homofocale à la courbe externe.

La couche comprise entre deux surfaces semblables du second degré, comme nous l'avons dit, est précisément la couche que forme l'électricité à la surface d'un corps conducteur. On conclut de là quelques conséquences relatives à cette couche électrique; par exemple, que : *La couche formée à la surface d'un ellipsoïde de révolution a partout la même épaisseur, dans le sens des rayons vecteurs issus des foyers.*

Démonstration de quelques propositions relatives aux surfaces du second degré homofocales.

Je vais démontrer quelques propositions dont j'ai fait usage dans le Mémoire qui précède.

I. — *Théorème relatif aux plans tangents à deux surfaces homofocales, menés parallèlement entre eux.*

THÉORÈME. *Quand deux plans tangents à deux surfaces homofocales sont parallèles, la différence des carrés de leurs distances au centre commun des deux surfaces est constante et égale à la différence des carrés des demi-axes majeurs des deux surfaces.*

Soient p, p' les perpendiculaires abaissées du centre des deux surfaces (a), (a') sur deux plans tangents à ces surfaces, respectivement, et parallèles entre eux; je dis qu'on aura

$$p^2 - p'^2 = a^2 - a'^2.$$

En effet, soient α, β, γ les angles que la perpendiculaire p fait avec les deux axes principaux de la surface (a); on a

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma;$$

a, b, c étant les trois demi-axes de la surface.

On a de même

$$p'^2 = a'^2 \cos^2 \alpha + b'^2 \cos^2 \beta + c'^2 \cos^2 \gamma.$$

Donc

$$p^2 - p'^2 = (a^2 - a'^2) \cos^2 \alpha + (b^2 - b'^2) \cos^2 \beta + (c^2 - c'^2) \cos^2 \gamma.$$

Mais, puisque les deux surfaces sont homofocales, on a

$$b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = a^2 - a'^2;$$

donc

$$p^2 - p'^2 = (a^2 - a'^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma),$$
$$p^2 - p'^2 = a^2 - a'^2.$$

C. Q. F. P.

L'expression de la perpendiculaire p, c'est-à-dire l'équation

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma,$$

peut se démontrer de plusieurs manières. En voici une démonstration

tres-simple : Le second membre exprime la somme des carrés des projections des trois demi-axes principaux de la surface sur la droite p. Cette somme, comme on sait, est égale à la somme des carrés des projections de trois demi-diamètres conjugués quelconques, sur la même droite. Qu'on prenne pour l'un de ces trois demi-diamètres, le demi-diamètre qui aboutit au point de contact du plan tangent à la surface; la projection de ce demi-diamètre sera précisément la perpendiculaire p, et les deux autres demi-diamètres, conjugués à celui-là, auront leurs projections nulles, parce qu'ils sont dans le plan diamétral perpendiculaire à cette droite p. L'équation se trouve donc démontrée.

II. — *Expression des demi-diamètres d'une surface, parallèles aux lignes de courbure en un point.*

Soient (μ), (ν) les surfaces qui déterminent les lignes de courbure en un point m d'une surface (ρ); D, D′ les demi-diamètres de cette surface, parallèles, inversement, à ces deux lignes de courbure, de sorte que D soit parallèle à la normale à la surface (μ), et D′ à la normale à la surface (ν); on aura

$$D = \sqrt{\rho^2 - \mu^2}, \quad D' = \sqrt{\rho^2 - \nu^2}.$$

Ces expressions résultent immédiatement de la considération de l'ellipse constante dont il a été question dans mes premières recherches sur les lignes géodésiques (*voir* p. 7 de ce volume); et elles se peuvent démontrer de bien d'autres manières. La démonstration suivante est peut-être la plus simple, parce qu'elle ne repose que sur le théorème précédent, qui est lui-même d'une démonstration immédiate et, on pourrait dire, intuitive.

Concevons le plan tangent à la surface (μ), au point m, et le plan parallèle à la surface ρ : soient q et p les distances de ces deux plans tangents au centre commun des deux surfaces; on aura $p^2 - q^2 = \rho^2 - \mu^2$. Il faut donc prouver que $D = \sqrt{p^2 - q^2}$. Or, si l'on projette trois demi-diamètres de la surface (ρ) sur la perpendiculaire p, la somme des carrés des projections sera égale au carré de cette droite. Prenons, pour les trois demi-diamètres, celui qui aboutit au point m, et les deux D, D′ qui sont dans le plan diamétral conjugué à celui-là. Le demi-diamètre D est parallèle à la normale, en m, à la surface (μ) :

il est donc dirigé suivant la perpendiculaire p, et est lui-même sa projection sur cette droite; le second D′ est perpendiculaire au premier; par conséquent, sa projection est nulle; enfin la projection du demi-diamètre Om est égale à q; on a donc

$$p^2 = D^2 + q^2, \quad \text{d'où} \quad D^2 = p^2 - q^2;$$

et, par suite,

$$D^2 = \rho^2 - \mu^2.$$

C. Q. F. D.

III. — *Démonstration de l'expression* $p = \dfrac{\rho\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}\sqrt{\rho^2-\varepsilon_1^2}}{\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}}$.

p représente la perpendiculaire abaissée du centre de la surface (ρ) sur son plan tangent au point (μ, ν); $\sqrt{\rho^2-\mu^2}$, $\sqrt{\rho^2-\nu^2}$ sont les demi-axes principaux de la section diamétrale parallèle à ce plan tangent; conséquemment le produit $p\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}$ exprime le volume du parallélipipède construit sur ces deux demi-axes principaux et leur conjugué qui aboutit au point (μ, ν). Ce volume est égal à celui du parallélipipède construit sur les trois axes principaux de la surface, lequel a pour expression $\rho\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}\sqrt{\rho^2-\varepsilon_1^2}$. On a donc l'équation

$$p = \frac{\rho\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}\sqrt{\rho^2-\varepsilon_1^2}}{\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}},$$

qu'il fallait démontrer [*].

IV. — *Démonstration de l'expression* $ds = \dfrac{\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}\sqrt{\rho^2-\varepsilon_1^2}}$.

ds est l'élément mm' de la courbe d'intersection des deux surfaces (μ), (ν), compris entre les deux surfaces infiniment voisines (ρ) et $(\rho + d\rho)$. Les plans tangents à ces surfaces, menés par les points m, m', sont sensiblement parallèles; conséquemment on a, en appelant p et $(p + dp)$ leurs distances au centre commun des deux surfaces,

$$(p + dp)^2 - p^2 = (\rho + d\rho)^2 - \rho^2.$$

[*] Cette équation se trouve démontrée d'une autre manière dans mon Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes, cité précédemment. (Voir *Recueil des Savants étrangers*, tome IX, page 668.)

ou

$$pdp = \rho d\rho.$$

Or dp, distance des deux plans, est égale à l'élément mm', que nous représenterons par ds; on a donc

$$ds = \frac{\rho\, d\rho}{p}.$$

ou, en mettant pour p sa valeur,

$$ds = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}.d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \varepsilon^2}\sqrt{\rho^2 - \varepsilon_1^2}}.$$

C. Q. F. P.

Autrement. Concevons que l'élément mm' soit prolongé en ligne droite; et soit P le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O des surfaces sur cette droite. On aura $ds = mm' = \mathrm{P}m' - \mathrm{P}m$. On a dans le triangle rectangle O$\mathrm{P}m$,

$$\overline{\mathrm{P}m}^2 = \overline{\mathrm{O}m}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2;$$

et pareillement

$$\overline{\mathrm{P}m'}^2 = \overline{\mathrm{O}m'}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2,$$

d'où

$$\overline{\mathrm{P}m'}^2 - \overline{\mathrm{P}m}^2 = \overline{\mathrm{O}m'}^2 - \overline{\mathrm{O}m}^2.$$

Or les points m, m' sont, sur les deux surfaces ρ, $(\rho + d\rho)$, deux points *correspondants;* la différence des carrés de leurs distances au centre des deux surfaces est donc égale à la différence des carrés des demi-axes majeurs des deux surfaces. On a donc

$$\overline{\mathrm{P}m'}^2 - \overline{\mathrm{P}m}^2 = (\rho + d\rho)^2 - \rho^2;$$

et, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\mathrm{P}m(\mathrm{P}m' - \mathrm{P}m) = \rho d\rho, \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}m\, ds = \rho\, d\rho,$$

ou

$$ds = \frac{\rho\, d\rho}{\mathrm{P}m} = \frac{\rho\, d\rho}{p}\,[*].$$

C. Q. F. T.

---

[*] J'ai démontré cette expression de ds d'une autre manière, dans mon *Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, et les rapports qui ont lieu entre cette attraction et le mouvement de la chaleur.* (Voir le *Journal de l'École Polytechnique,* xxve cahier, page 266.)

Notes sur quelques questions de priorité, au sujet d'un Mémoire de M. Mac Cullagh;

Par M. CHASLES.

I. Depuis mes dernières recherches sur les lignes géodésiques, j'ai eu connaissance d'un Mémoire de M. Mac Cullagh sur les surfaces du second degré [*]. Je m'empresse de dire que la propriété des tangentes communes à deux surfaces homofocales, relative aux segments qu'une troisième surface homofocale fait sur ces droites, se trouve énoncée (sans démonstration) dans ce Mémoire.

J'ai été conduit naturellement à ce théorème, par cette considération, que les tangentes aux lignes géodésiques jouissant déjà de plusieurs propriétés des tangentes aux lignes de courbure, le théorème en question, qui m'était connu depuis longtemps relativement aux lignes de courbure [**], s'appliquait probablement aussi aux lignes géodésiques, et par conséquent aux tangentes communes à deux surfaces homofocales. L'expression générale du rapport $\frac{EE'}{Oc^2}$, qui m'avait déjà été d'un grand usage dans mon Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes cité précédemment, m'a conduit sans difficulté à la généralisation que j'avais entrevue.

L'intéressant Mémoire de M. Mac Cullagh pourra me donner lieu à plusieurs observations dans un autre moment; je m'arrêterai ici seulement sur quelques questions de priorité où, faute d'avoir connu certains documents que j'avais cru inutile, jusqu'à ce jour, de rappeler, M. Mac Cullagh s'est trouvé induit en erreur.

II. Il suppose que je n'ai fait connaître qu'en 1837, par la publication de mon *Aperçu historique,* mes idées et mes résultats concernant la théorie des *coniques focales* des surfaces du second degré, sur laquelle il a donné lui-même quelques théorèmes dans ses Leçons à l'Université de Dublin, dans le cours de 1836. Sans qu'il soit nécessaire d'examiner ici le théorème principal de M. Mac Cullagh et la manière dont il envisage cette théorie, ce en quoi nos vues sont différentes, il me suffira de citer quelques dates antérieures à 1836, et qui se rapportent à la théorie complète, telle que je l'ai reproduite depuis dans mon *Aperçu historique,* et telle que, à mon sens, elle doit être entendue, pour donner lieu, dans les surfaces du second degré, à des théorèmes analogues (on peut dire identiques) aux propriétés des foyers dans les coniques.

---

[*] Ce Mémoire, dont M. Mac Cullagh m'a fait l'honneur de m'adresser un exemplaire, est extrait des derniers numéros des *Proceedings* de l'Académie royale d'Irlande.

[**] Ce cas se trouve démontré dans mon Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes, page 668.

1°. J'ai adressé le 2 janvier 1835 à l'Académie des Sciences, une ample collection de théorèmes, sous le titre de *Propriétés nouvelles des surfaces du second degré analogues à celles des foyers dans les coniques.* A ces théorèmes étaient jointes beaucoup d'autres propositions relatives notamment aux axes permanents de rotation des corps, et qui offraient des applications variées de cette théorie des focales.

2°. Le journal *l'Institut* fait mention de ce Mémoire, sous son titre, à la date du 7 janvier 1835 (tome III, page 8).

3°. Il est question de la même théorie des focales dans le *Bulletin de l'Académie de Bruxelles,* séance du 7 février 1835, où on lit : « M. Chasles, dans une Lettre adressée » à M. Quetelet, fait connaître différents résultats géométriques sur l'analogie de *cer-* » *taines courbes* considérées dans les surfaces du second degré, et les *foyers* dans les » coniques ou les *lignes focales* dans les cônes.... »

4°. Le journal *l'Institut,* numéro du 22 avril 1835 (tome III, page 129), a reproduit en partie ce passage du *Bulletin de l'Académie de Bruxelles.*

Ainsi mes premières communications authentiques sur cette théorie datent du commencement de 1835, et elles ne se sont pas bornées à quelques théorèmes isolés, dénotant une analogie ou incomplète et restreinte, ou simplement apparente et spécieuse, comme celle que peuvent présenter, sur quelques points, des théories très-différentes : mais elles comprenaient, avec le principe et le point de vue véritable de cette théorie, nouvelle alors et dont même je crois qu'il ne se trouvait aucun germe antérieur, un grand nombre de théorèmes qui constituaient cette théorie dans un état de développement déjà très-avancé, et montraient toute l'importance qu'elle devait acquérir dans la Géométrie, importance qui ne peut être aujourd'hui douteuse aux yeux de personne.

III. M. Mac Cullagh suppose encore que le théorème sur les cônes de même sommet circonscrits à deux surfaces homofocales, savoir, que ces cônes ont les mêmes lignes focales, a été donné en premier lieu par M. Jacobi, dans le Journal de M. Crelle (tome XII, page 137, année 1834), et il ajoute que lui-même l'a fait connaître en 1836 dans ses Leçons à l'Université de Dublin, avant la publication de mon *Aperçu historique.*

Or, dans un Mémoire sur les surfaces de révolution, imprimé en 1829 dans le tome V des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles,* j'ai d'abord démontré le cas relatif à deux surfaces de révolution; et ayant à démontrer, dans ce même Mémoire, quelques propriétés des deux *coniques conjuguées* déjà connues comme étant, chacune, le lieu des sommets des cônes de révolution passant par l'autre, j'ai annoncé que ces courbes jouissaient de plusieurs autres propriétés, et j'ai cité celle-ci : *De quelque point de l'espace qu'on regarde les deux coniques, elles paraissent toujours se couper à angles droits.* Ainsi voilà déjà, en 1829, deux cas du théorème général. Peu de temps après, dans un Mémoire sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques, communiqué en 1831 à la Société philomathique, j'ai démontré, comme lemme qui m'était nécessaire, cette proposition : *De quelque point de l'espace qu'on considère deux surfaces homofocales, leurs contours apparents paraissent se couper à angles droits;*

c'est-à-dire, que les cônes circonscrits aux deux surfaces se coupent à angles droits, et que dès lors ils ont les mêmes lignes focales, ainsi qu'il résultait de mes Mémoires sur les surfaces de révolution et sur les cônes du second degré, où se trouvait, pour la première fois, cette propriété des cônes. Voilà donc le théorème général démontré dans un Mémoire communiqué à la Société philomathique en 1831.

En outre, ce théorème général est énoncé dans une Lettre à M. Quetelet, dont un extrait a paru dans le *Bulletin de l'Académie de Bruxelles* du 6 décembre 1834 (pages 216 à 219); et on lit ensuite cet autre passage relatif aux surfaces homofocales: « Ces » surfaces jouissent de beaucoup d'autres propriétés qui font le sujet d'un Mémoire de » Géométrie pure, que j'aurais eu l'honneur, depuis longtemps, de vous communi- » quer, si je n'avais été occupé de mes recherches historiques. »

Ce passage du *Bulletin de l'Académie de Bruxelles* a été reproduit par le Journal *l'Institut* du 24 décembre 1834 (tome II, page 421).

On remarquera que dès cette époque j'annonçais beaucoup d'autres propriétés des surfaces homofocales, formant un Mémoire composé *depuis longtemps*.

En effet, cette théorie, à laquelle se liaient les recherches qui ont fait le sujet de mes Mémoires sur les surfaces de révolution, sur les cônes, et sur les coniques sphériques, était terminée, en grande partie du moins, dès 1829, quand j'ai publié le premier de ces Mémoires, qui a été bientôt suivi des deux autres, auxquels devait faire suite le Mémoire sur les focales dans les surfaces à trois axes inégaux. Il m'était nécessaire de procéder ainsi progressivement et pas à pas, non-seulement parce que c'était l'ordre naturel des choses, puisque toutes ces recherches se rapportaient à une même théorie, mais surtout parce que je m'astreignais à la condition, parfois pénible, de n'employer que des considérations de Géométrie; ce qui oblige de préparer les voies par des recherches préliminaires qui peuvent prendre beaucoup d'extension. Depuis, diverses autres occupations, notamment des recherches historiques, m'ont toujours fait ajourner la publication de ce Mémoire; et c'est pour cela que je me suis décidé à faire connaître, par une analyse, vers la fin de 1834, mes principaux résultats dans cette théorie qui comblait une vaste lacune existante dans la Géométrie des surfaces du second degré.

Mais, pour revenir au théorème particulier sur lequel M. Mac Cullagh a élevé une question de priorité, peut être pensera-t-on qu'indépendamment du Mémoire communiqué en 1831 à la Société philomathique et mentionné dans mon *Aperçu historique* (page 392), et de ma communication à M. Quetelet, insérée dans le *Bulletin de l'Académie de Bruxelles* du 7 décembre 1834, les deux cas du théorème, relatifs aux surfaces de révolution et aux deux coniques conjuguées, qui se trouvent dans mon Mémoire de 1829, présentaient eux-mêmes assez d'intérêt par leur nouveauté et leur importance [*], et comme mettant naturellement sur la voie du cas général, pour qu'on pût

[*] C'était le premier exemple de deux surfaces conjuguées formant le lieu des centres de courbure d'une même surface courbe, exemple qui manquait dans cette théorie de la courbure des surfaces, exposée avec tant de lucidité par M. Monge et M. Ch. Dupin.

en tenir compte et ne pas les passer absolument sous silence dans une question de priorité.

IV. J'ai communiqué en 1843 à l'Académie des Sciences, un Mémoire sur les propriétés des arcs de section conique dont la différence est rectifiable, où se trouvent, parmi beaucoup d'autres, ces deux théorèmes : 1°. « Quand deux coniques décrites » des mêmes foyers ne se coupent pas, la somme des deux tangentes menées d'un point » de la conique externe à la conique interne, moins l'arc de celle-ci compris entre les » deux points de contact, est une quantité constante. » 2°. « Quand les deux coniques » se coupent, la différence des deux tangentes menées d'un point de l'une à la seconde, » est égale à la différence des arcs de celle-ci, comptés depuis le point d'intersection » de la première courbe jusqu'aux points de contact des deux tangentes. »

M. Mac Cullagh, dans une Note qui termine son Mémoire, démontre ces deux théorèmes, pour les coniques planes et les coniques sphériques, et fait observer que le premier est dû à M. Graves qui l'a démontré relativement aux coniques sphériques, dans les *Notes et Additions* jointes à la traduction de mes Mémoires sur les cônes et les coniques sphériques ; et qu'ensuite il a été reproduit dans les *Annuaires de l'Université de Dublin* des années 1842 et 1843. Quoique je doive avoir occasion, prochainement, de revenir sur ce sujet dans un Mémoire spécial, je m'empresse ici de faire mention de l'observation de M. Mac Cullagh. Comme elle ne paraît pas s'appliquer au second des deux théorèmes, qui n'est pas une conséquence du premier, et d'après le silence gardé par le savant géomètre sur les autres propriétés fort curieuses des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable, notamment celles qui concernent les conditions de maximum et de minimum des périmètres des polygones inscrits et circonscrits à ces courbes, je dois penser que le seul théorème en question était connu avant que je fisse ma communication à l'Académie, et que la priorité me reste à l'égard de tous les autres.

V. M. Mac Cullagh dit qu'il paraît que les élèves de l'École Polytechnique, de l'origine de cet établissement, ont découvert et démontré complètement la double génération de l'hyperboloïde à une nappe par une droite ; que, toutefois, Wren (en 1669) avait fait connaître cette propriété à l'égard de l'hyperboloïde de révolution. J'ai fait moi-même mention de ce fait et cité le Mémoire de Wren, dans mon *Aperçu historique*, page 242. J'ai ajouté que Parent, en 1698, a aussi trouvé cette propriété de l'hyperboloïde de révolution, qu'il a démontrée de deux manières, géométriquement et par l'analyse, et que, dans le même temps, Sauveur en a aussi donné une démonstration ; ce qu'on voit dans les *Essais et Recherches de mathématique et de physique*, de Parent ; tome II, page 645, et tome III, pages 470 et 526.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

« J'ai l'honneur de vous envoyer un Mémoire [*] contenant quelques remarques relatives au chapitre XXXV du *Traité des fonctions elliptiques* de Legendre, auquel j'ajoute des résultats qui sont nouveaux, je crois. La route que j'ai adoptée met en évidence l'origine et la cause des formules du chapitre dont il s'agit; ce qui, je pense, n'est pas assez clairement indiqué par la méthode que l'illustre auteur a suivie.

» Depuis ma dernière communication [**], j'ai vu, dans un volume récent du Journal de M. Crelle, qu'un savant de Rome, M. Tortolini, a donné une discussion complète et élégante de la quadrature et de la cubature de la surface d'élasticité. Je dois donc renoncer à la priorité des résultats contenus dans la Note que je vous ai envoyée sous la date du 3 mars sans avoir aucune connaissance des travaux de M. Tortolini.

» L'expression $\iint RR_1 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1$ pour l'aire de la surface dérivée (c'est-à-dire le lieu des projections orthogonales d'un point fixe sur les plans tangents à une surface donnée), qui se trouve dans ma Note, peut être déduite de considérations géométriques. En effet, si l'on désigne par R_2 la perpendiculaire qu'on abaisse du point fixe sur un plan tangent à la surface dérivée, l'élément de cette surface sera évidemment $\frac{R_1^2 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1}{R_2}$. Mais, d'après une construction pour ce plan tangent, qu'on obtient aisément par la méthode des infiniment petits, et qui est tout à fait semblable au cas analogue dans les courbes, on a

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R}{R_1}.$$

Donc

$$S_1 = \iint RR_1 \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1.$$

Cette formule conduit presque sans calcul à l'expression pour l'aire de la surface d'élasticité. »

---

[*] Ce Mémoire paraîtra dans un prochain cahier. (J. L.)

[**] Il s'agit ici, et dans ce qui suit, de l'article inséré au cahier précédent (page 81) sous ce titre : *Évaluation de l'aire de la surface nommée, dans l'optique, surface d'élasticité.* M. Tortolini vient de publier, en effet, un Mémoire sur le même sujet dans le Journal de M. Crelle; et, si ma mémoire ne me trompe, il avait déjà donné un extrait de son travail dans un recueil italien. (J. L.)

REMARQUES

SUR LES SYSTÈMES DE DROITES DANS L'ESPACE;

PAR M. J. BOUQUET,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

I.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

les équations d'une série de droites, a, b, p, q étant fonctions d'un paramètre arbitraire t. Prenons une autre droite de la série correspondant à la valeur $t + \Delta t$ du paramètre,

$$(2)\qquad \begin{cases} x = (a + \Delta a) z + p + \Delta p, \\ y = (b + \Delta b) z + q + \Delta q. \end{cases}$$

La condition pour que ces droites se coupent est

$$(3)\qquad \Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p = 0,$$

ou

$$(4)\qquad \frac{\Delta a}{\Delta b} = \frac{\Delta p}{\Delta q}.$$

Cette expression (3) est le numérateur de la plus courte distance de deux droites. La plus courte distance est donc

$$(5)\qquad \rho = \frac{\Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p}{M \Delta t}.$$

M étant une quantité finie.

II.

Cherchons la condition pour que les droites de la série (1) soient

tangentes à une même courbe dans l'espace. Appelons x, y, z les coordonnées du point de contact d'une droite particulière; ces coordonnées sont des fonctions de t variant en même temps que a, b, p, q. On a donc

$$(6)\qquad \begin{cases} dx = a\,dz + z\,da + dp, \\ dy = b\,dz + z\,db + dq; \end{cases}$$

dx, dy, dz représentent, dans les équations (6), les variations en passant d'un point de la courbe à un point voisin, aussi sur la courbe. Passons maintenant du point x, y, z au point voisin sur la droite (1), on aura

$$(7)\qquad \begin{cases} dx = a\,dz, \\ dy = b\,dz. \end{cases}$$

Pour que la droite soit tangente à la courbe, il faut que ces deux sortes de variations soient les mêmes; il faut donc que

$$(8)\qquad \begin{cases} z\,da + dp = 0, \\ z\,db + dq = 0, \end{cases}$$

d'où la condition cherchée

$$(9)\qquad da\,dq - db\,dp = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}.$$

III.

La plus courte distance (5) peut s'écrire

$$\rho = \frac{1}{M\,dt}\left\{\begin{array}{l} \left(da + \frac{1}{2}d^2a + \frac{1}{2.3}d^3a + \ldots\right)\left(dq + \frac{1}{2}d^2q + \ldots\right) \\ - \left(db + \frac{1}{2}d^2b + \frac{1}{2.3}d^3b + \ldots\right)\left(dp + \frac{1}{2}d^2p + \ldots\right) \end{array}\right\}.$$

$$\rho = \frac{1}{M\,dt}\left[(da\,dq - db\,dp) + \frac{1}{2}(d^2a\,dq + d^2q\,da - d^2b\,dp - d^2p\,db) + \ldots\right].$$

Si l'équation de condition (9) a lieu, le premier terme de ρ est nul; le second est nul aussi, comme étant la différentielle du premier. Donc

THÉORÈME. *La plus courte distance entre deux droites consécutives tangentes à une même courbe est généralement un infiniment petit du troisième ordre.*

IV.

Supposons qu'en même temps que la condition (9) a lieu, le terme du troisième ordre soit nul,

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{1}{1.2.3}(d^3a\,dq + d^3q\,da - d^3b\,dp - d^3p\,db) \\ + \frac{1}{1.2}\frac{1}{1.2}(d^2a\,d^2q - d^2b\,d^2p) = 0. \end{cases}$$

Le second terme différentié donne

$$(d^3a\,dq + d^3q\,da - d^3b\,dp - d^3p\,db) + 2\,(d^2a\,d^2q - d^2b\,d^2p) = 0.$$

De cette équation, combinée avec la précédente, il résulte

$$(11)\qquad d^2a\,d^2q - d^2b\,d^2p = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2a}{d^2b} = \frac{d^2p}{d^2q}.$$

L'équation (11) exprime que la courbe est plane. En effet, en différentiant les équations (8), on a

$$d^2p = -z\,d^2a - da\,dz,$$
$$d^2q = -z\,d^2b - db\,dz;$$

l'équation (11), ou

$$\frac{d^2p}{d^2a} = \frac{d^2q}{d^2b},$$

devient ainsi

$$(12)\qquad \frac{d^2a}{da} = \frac{d^2b}{db},$$

laquelle donne, par l'intégration,

$$(13)\quad \begin{cases} da = \mathrm{K}db, \\ a = \mathrm{K}b + \mathrm{L}, \\ dx = \mathrm{K}dy + \mathrm{L}dz, \\ x = \mathrm{K}y + \mathrm{L}z + \mathrm{N}, \end{cases}$$

K, L, N étant des constantes arbitraires.

Théorème. *Lorsque la plus courte distance entre les tangentes consécutives à une même courbe est un infiniment petit d'un ordre supérieur au troisième, la courbe est plane, et par conséquent la plus courte distance est rigoureusement nulle.*

V.

On peut arriver directement à la même conséquence. Des deux conditions (9) et (11) nous avons déduit

$$da = \mathrm{K}\,db, \qquad dp = \mathrm{K}\,dq:$$

par la différentiation, on obtient

$$d^2a = \mathrm{K}\,d^2b, \quad d^2p = \mathrm{K}\,d^2q,$$
$$d^3a = \mathrm{K}\,d^3b, \quad d^3p = \mathrm{K}\,d^3q,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il en résulte

$$\frac{da}{db} = \frac{d^2a}{d^2b} = \frac{d^3a}{d^3b} = \ldots = \frac{dp}{dq} = \frac{d^2p}{d^2q} = \frac{d^3p}{d^3q} = \ldots,$$

et, par suite,

$$\frac{da + \frac{1}{1.2}d^2a + \frac{1}{1.2.3}d^3a + \ldots}{db + \frac{1}{1.2}d^2b + \frac{1}{1.2.3}d^3b + \ldots} = \frac{dp + \frac{1}{1.2}d^2p + \frac{1}{1.2.3}d^3p + \ldots}{dq + \frac{1}{1.2}d^2q + \frac{1}{1.2.3}d^3q + \ldots},$$

ou

$$\frac{\Delta a}{\Delta b} = \frac{\Delta p}{\Delta q}.$$

La plus courte distance est donc identiquement nulle.

NOTE

SUR LE THÉORÈME DE M. CAUCHY

RELATIF

AU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES;

PAR M. ERNEST LAMARLE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

M. Cauchy a démontré [*] que la série de Maclaurin est convergente tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs pour lesquelles la fonction ou sa dérivée cesse d'être continue.

Après avoir appliqué ce théorème à quelques cas particuliers, M. Cauchy ajoute [**] :

« Nous remarquerons en finissant que les fonctions ci-dessus, prises » pour exemples, et leurs dérivées du premier ordre, deviennent tou- » jours infinies ou discontinues pour les mêmes valeurs du module de » la variable indépendante. Si l'on était assuré qu'il en fût toujours » ainsi, on pourrait, dans le théorème énoncé, se dispenser de par- » ler de la fonction dérivée; mais, comme on n'a point à cet égard » une certitude suffisante, il est plus rigoureux d'énoncer le théorème » dans les termes dont nous nous sommes servis plus haut. »

Le but de cette Note est de montrer, relativement à la condition de continuité,

1°. Qu'elle peut toujours être omise, en ce qui concerne la dérivée;

2°. Qu'elle est d'ailleurs insuffisante, à moins qu'elle n'implique une certaine périodicité de la fonction.

[*] *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, années 1840 et 1841.

[**] Même ouvrage, tome I, page 32.

Précisons d'abord ce que nous entendons par fonction continue.

Étant donnée une fonction quelconque $f(x)$, remplaçons x par [*] $re^{\theta\sqrt{-1}}$, et, mettant en évidence les parties réelles et imaginaires, effectuons leur séparation dans l'équation symbolique

$$(1) \qquad f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta).$$

Concevons, en outre, que l'argument θ varie de zéro à 2π.

Cela posé, si les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ restent finies et réelles, et qu'elles ne changent point brusquement de détermination numérique, pour toutes valeurs du module comprises entre deux limites choisies comme on voudra, $f(x)$ est et demeure continue entre ces mêmes limites. Dans le cas contraire [**], il y a discontinuité, sinon pour les valeurs réelles, du moins pour les valeurs imaginaires.

La séparation effectuée dans l'équation (1) peut offrir quelque difficulté. Néanmoins, il n'est pas douteux qu'elle ne soit toujours possible. S'agit-il seulement des fonctions développables en série convergente suivant la formule de Maclaurin? rien de plus simple que de constater à priori la possibilité de la séparation. On a, en effet,

$$(2) \qquad f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots;$$

de là résulte

$$f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = a + bre^{\theta\sqrt{-1}} + cr^2 e^{2\theta\sqrt{-1}} + \ldots.$$

c'est-à-dire, en remplaçant $e^{n\theta\sqrt{-1}}$ par $\cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta$,

$$f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = a + br\cos\theta + cr^2\cos 2\theta + \ldots$$
$$+ \sqrt{-1}\,(br\sin\theta + cr^2\sin 2\theta + \ldots$$

Il vient donc, en ce cas,

$$(3) \qquad \varphi(r, \theta) = a + br\cos\theta + cr^2\cos 2\theta + \ldots,$$

$$(4) \qquad \psi(r, \theta) = br\sin\theta + cr^2\sin 2\theta + \ldots.$$

---

[*] Le module r est, par hypothèse, essentiellement positif.

[**] On pourrait appeler *continuité relative* celle qui subsiste pour les valeurs réelles, et *continuité absolue* celle qui s'étend à la fois aux valeurs réelles et imaginaires.

On voit, d'ailleurs, que la convergence de la série (2), où x est supposée réelle, entraîne [*] celle des séries (3) et (4), et, par conséquent, la continuité des fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ pour toute l'étendue de l'intervalle précédemment indiqué.

Cette simple remarque suffit pour établir à priori que la continuité doit subsister à partir de $r = 0$ dans toute fonction développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable.

Constatons, en outre, que, pour toute fonction de cette nature, on a toujours et nécessairement

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi), \quad \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi).$$

Voilà donc une condition nouvelle, reconnue tout d'abord indispensable. Elle consiste en ce que les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ sont assujetties à reprendre les mêmes valeurs aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Réduite à ces termes, elle n'offre rien de surabondant et qui ne soit essentiellement distinct des caractères propres à la continuité.

Dans le cas de $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, l'on a

$$\varphi(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \cos \tfrac{3}{2}\theta, \quad \psi(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \sin \tfrac{3}{2}\theta,$$

et, bien que la fonction soit continue, ainsi que sa dérivée, pour toute valeur du module, néanmoins le développement demeure impossible. La première condition n'est donc pas suffisante.

Faisons $\theta = 0$, puis $\theta = 2\pi$, nous aurons

$$\varphi(r, 0) = +r^{\frac{3}{2}}, \quad \varphi(r, 2\pi) = -r^{\frac{3}{2}},$$

et, comme ces valeurs sont différentes, l'impossibilité du développement se trouve démontrée.

En restreignant au plus petit nombre possible les conditions que doit remplir une fonction pour être développable en série convergente

---

[*] La démonstration de cette propriété est tout élémentaire. Elle fait partie d'un travail que nous nous proposons de publier prochainement. Nous avons cru inutile de la reproduire ici, le lecteur pouvant y suppléer sans difficulté.

suivant la formule de Maclaurin, nous voyons, d'après ce qui précède, qu'il en faut au moins deux.

La première, c'est que la continuité subsiste à partir de $r = 0$ pour toute valeur du module inférieure à R.

La seconde, que dans cet intervalle chacune des fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ prenne pour $\theta = 0$ même valeur que pour $\theta = 2\pi$.

Ces conditions nécessaires étant supposées remplies, il nous reste à démontrer qu'elles sont suffisantes.

Soit

$$f(x) = f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta).$$

Admettons d'abord qu'entre deux valeurs de r, convenablement choisies, la continuité subsiste, et que l'on ait en même temps pour toute valeur du module comprise dans cet intervalle,

$$(5) \qquad \varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi), \quad \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi).$$

La dérivée de la fonction $f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$, prise par rapport à l'argument θ, est $r\sqrt{-1}\,e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$; il vient donc [*]

$$r\sqrt{-1}\int_0^{2\pi} e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = \varphi(r, 2\pi) - \varphi(r, 0)$$
$$+ \sqrt{-1}\,[\psi(r, 2\pi) - \psi(r, 0)],$$

et, eu égard aux équations (5),

$$\int_0^{2\pi} e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = 0.$$

Mais, d'un autre côté,

$$e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \frac{df\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)}{dr}.$$

---

[*] Voir notre *Essai sur les principes fondamentaux de l'Analyse transcendante*, page 53.

On a donc aussi

$$\int_0^{2\pi} \frac{df\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)}{dr}\, d\theta = \frac{d\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta}{dr} = 0.$$

De là résulte immédiatement

$$(6) \qquad \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = \text{constante}.$$

S'agit-il maintenant de la question que nous avons principalement en vue, le module r pouvant varier à partir de zéro jusqu'à la limite R sans qu'il y ait solution de continuité, ni que les équations (5) cessent d'avoir lieu. En ce cas, l'on peut, sans altérer le résultat général fourni par l'équation (6), y poser $r = 0$. Il vient donc, *quel que soit r*, pourvu qu'il reste moindre que R,

$$(7) \qquad \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = f(0)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi f(0).$$

Considérons en particulier la fonction

$$\frac{x}{x-z} = \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z} = \frac{r^2 - rz\cos\theta}{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta} - \sqrt{-1}\,\frac{rz\sin\theta}{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta}.$$

Cette fonction satisfait évidemment aux équations (5), et elle est continue pour tout intervalle qui ne comprend pas la valeur $r = z$. Si donc on donne à r une valeur quelconque moindre que z, l'on a, de même que pour $r = 0$,

$$(8) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, d\theta = 0.$$

Suppose-t-on, au contraire, que la valeur quelconque assignée à r soit plus grande que z, il vient

$$\frac{x}{x-z} = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}}}{e^{\theta\sqrt{-1}} - \frac{z}{r}}.$$

Sous cette forme, on reconnaît que l'intégrale ne peut être indépen-

dante de r sans l'être aussi de z; on peut dès lors poser $z = 0$, et en déduire pour valeur générale

$$(9) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, d\theta = 2\pi.$$

Replaçons-nous, par rapport à $f(x)$, dans les hypothèses en vertu desquelles l'équation (7) subsiste. Si, prenant z moindre que R, nous faisons

$$F(x) = \frac{f(x) - f(z)}{x - z}\, x,$$

il est clair :

1°. Que les équations (5) sont satisfaites par $F(x)$ en même temps que par $f(x)$;

2°. Que, continue à partir de $r = 0$, $F(x)$ ne cesse pas de l'être pour toute valeur de r moindre que z;

3°. Que si la valeur z peut être atteinte par le module, sans qu'il y ait solution de continuité, il en est de même des valeurs supérieures à z et moindres que R.

Le dénominateur $x - z$ ne s'annulant qu'autant que l'on fait à la fois r égal à z, et θ égal à zéro ou 2π, il y a lieu d'observer, *qu'en vertu des conditions remplies par* $f(x)$, le résultat qui répond à ces substitutions est nécessairement le même que celui qui, dans le système des valeurs exclusivement réelles, répond à l'hypothèse $x = z$. Or, dans ce système, la vraie valeur de $F(x)$ est alors exprimée par $zf'(z)$, et quand même elle prendrait la forme $\frac{1}{0}$, *cette forme ne pouvant qu'être accidentelle et non permanente*, il suffirait, pour la faire disparaître, d'attribuer à z une autre valeur prise arbitrairement plus grande ou plus petite.

Il suit de là qu'en excluant, *pour le moment*, parmi les valeurs de z inférieures à R, celles qui rendraient (*s'il en est qui le puissent*) $f'(z)$ infinie, la fonction $F(x)$ ne cesse pas de remplir les conditions de l'équation (7), alors même qu'on y fait r supérieur à z, et z aussi rapproché qu'on voudra de R. Or $F(0) = 0$. Il vient donc, en général, quel que

soit r, plus petit ou plus grand que z, mais moindre que R,

$$(10)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) - f(z)}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, re^{\theta\sqrt{-1}}\, d\theta = 0.$$

Parmi les valeurs du module inférieures à R, ne considérons plus dès à présent que celles qui sont supérieures à z. Nous aurons

$$r > z.$$

Or, en ce cas, l'on déduit de l'équation (9),

$$\int_0^{2\pi} f(z) \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, d\theta = 2\pi f(z);$$

il vient donc, en vertu de l'équation (10),

$$(11)\qquad 2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) \frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z}\, d\theta.$$

Cela posé, r étant plus grand que z, l'on a, en série convergente,

$$\frac{re^{\theta\sqrt{-1}}}{re^{\theta\sqrt{-1}} - z} = 1 + \frac{z}{r} e^{-\theta\sqrt{-1}} + \frac{z^2}{r^2} e^{-2\theta\sqrt{-1}} + \frac{z}{r} e^{-3\theta\sqrt{-1}} + \ldots.$$

Il vient donc aussi

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\pi f(z) = &\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta + \frac{z}{r}\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-\theta\sqrt{-1}}\, d\theta \\ &+ \frac{z^2}{r^2}\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-2\theta\sqrt{-1}}\, d\theta + \ldots. \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire le développement de $f(z)$ en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable.

Pour ne laisser aucun doute à cet égard, prenons le terme général

$$\begin{aligned} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}} = &\varphi(r, \theta)\cos n\theta + \psi(r, \theta)\sin n\theta \\ &+ \sqrt{-1}\,[\psi(r, \theta)\cos n\theta - \varphi(r, \theta)\sin n\theta]. \end{aligned}$$

Si nous désignons par k et k' les plus grandes valeurs absolues que

prennent $\varphi(r, \theta)$ et $\psi(r, \theta)$ dans l'intervalle compris entre zéro et 2π, nous aurons, tant pour la partie réelle que pour la partie imaginaire, qui d'ailleurs est nécessairement nulle,

$$\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}}\, d\theta < 2\pi\,(k - k');$$

or cela suffit pour qu'il y ait évidemment convergence.

Les termes de la série (12) étant irréductibles entre eux, chacun d'eux doit être indépendant de r. Il faut donc que l'intégrale $\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}}\, d\theta$, qui peut être accidentellement nulle, se réduise, en général, au produit d'une constante par le facteur r^n. Posons, en conséquence,

$$Cr^n = \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-n\theta\sqrt{-1}}\, d\theta.$$

De là résulte, en prenant les dérivées de l'ordre n par rapport à r,

$$1.2.3\ldots n.C = \int_0^{2\pi} f^n\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta,$$

puis, faisant $r = 0$, ce qui est permis, puisque la valeur du second membre est indépendante de r,

$$C = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_0^{2\pi} f^n(0)\, d\theta = \frac{2\pi f^n(0)}{1.2\ldots n}.$$

En transportant cette valeur dans l'équation (12), on trouve immédiatement

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \frac{z}{1.2} f''(0) + \frac{z}{1.2.3} f'''(0) + \ldots.$$

Le même résultat s'obtient avec une égale facilité lorsqu'on applique à l'équation (12) le procédé d'une suite de dérivations effectuées sur la variable z.

La série (12) étant démontrée convergente pour une valeur de z aussi rapprochée qu'on voudra de R, il en résulte qu'elle ne peut cesser de l'être pour aucune valeur plus petite. Il n'est donc pas de valeurs infé-

meures à R qui puisse rendre $f'(z)$ infinie, car la convergence de la série implique celle de sa dérivée.

Résumant ce qui précède, nous sommes en droit de conclure que les deux conditions reconnues à priori nécessaires pour la possibilité du développement sont en même temps suffisantes.

En conséquence, nous énoncerons comme il suit le théorème qui fait l'objet de cette Note :

Toute fonction est développable en série convergente, suivant la formule de Maclaurin, tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs, pour laquelle la fonction cesse d'être continue, ou de prendre même valeur aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Hors de là, la série devient divergente.

Ce théorème s'étend de lui-même au développement des fonctions suivant la série de Taylor. En effet, si l'on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{12} f''(x) + \ldots,$$

et que, considérant h comme variable, l'on pose

$$F(h) = f(x+h),$$

il en résulte immédiatement

$$F(h) = F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{12} F''(0) + \ldots,$$

c'est-à-dire la formule de Maclaurin. On voit donc que, pour appliquer l'énoncé précédent à la série de Taylor, il suffit de substituer $f(x+h)$ à $f(x)$ et d'y traiter h comme variable.

La condition relative aux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ étant supposée remplie, il peut arriver que la continuité cesse alors que le module s'annule. En ce cas, si l'on prend, au lieu de la fonction, le produit de cette fonction par une certaine puissance *entière* de la variable, et que l'on pose, par exemple,

$$x^n f(x) = \varphi(x),$$

la première condition ne cessera pas d'être remplie. On voit, en outre, que $\varphi(x)$ sera continue en même temps que $f(x)$ et pourra l'être en-

core pour $r = 0$. Il viendra donc, en admettant que l'exposant n soit convenablement déterminé,

$$z^n f(z) = \varphi(0) + z\varphi'(0) + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(0) + \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$f(z) = z^{-n}\varphi(0) + \frac{z^{-(n-1)}}{1}\varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\varphi^n(0)$$
$$+ \frac{z}{1.2\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}(0) + \ldots.$$

Si les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ ne prennent point même valeur respective aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, cette condition peut avoir lieu aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2m\pi$. En ce cas, tous les calculs, tous les raisonnements qui précèdent demeurent applicables, pourvu qu'on remplace 2π par $2m\pi$, $\frac{x}{x-z}$ par $\frac{x^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{m}} - z^{\frac{1}{m}}}$, et, *au besoin, fx* par le produit $x^{\frac{n}{m}} f(x) = \varphi(x)$.

On a donc, en série convergente,

$$2m\pi z^{\frac{n}{m}} f(z) = \int_0^{2m\pi} \varphi\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta - \left(\frac{z}{r}\right)^{\frac{1}{m}} \int_0^{2m\pi} \varphi\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{\frac{\theta}{m}\sqrt{-1}} d\theta$$
$$- \left(\frac{z}{r}\right)^{\frac{2}{m}} \int_0^{2m\pi} \varphi\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) e^{-\frac{2\theta}{m}\sqrt{-1}} d\theta + \ldots.$$

Soit d'ailleurs $z = u^m$, d'où

$$z^{\frac{n}{m}} f(z) = u^n f(u^m) = \chi(u).$$

il vient nécessairement

$$\chi(u) = \chi(0) + \frac{u}{1}\chi'(0) + \frac{u^2}{1.2}\chi''(0) + \ldots,$$

et, par suite,

$$f(z) = z^{-\frac{n}{m}}\chi(0) + \frac{z^{-\frac{n-1}{m}}}{1}\chi'(0) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\chi^n(0)$$
$$+ \frac{z^{\frac{1}{m}}}{1.2\ldots(n+1)}\chi^{n+1}(0) + \ldots.$$

Le théorème se trouvant ainsi généralisé, nous dirons maintenant :

Toute fonction est développable en série convergente, suivant un des types réductibles aux formules de Taylor ou de Maclaurin, tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs, pour laquelle le produit de la fonction par une certaine puissance de la variable cesse d'être continu, ou de prendre même valeur aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2m\pi$.

Est-il nécessaire d'ajouter que le nombre quelconque m se détermine par la condition des limites, et la puissance $\frac{n}{m}$ de la variable par la condition de continuité à l'origine des valeurs du module.

Les mêmes considérations s'appliquent au développement des fonctions en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances descendantes de la variable. Bornons-nous au cas le plus simple, $f(x)$ étant supposée continue, et satisfaisant, en outre, aux équations (5), pour toute valeur du module supérieure à R.

De la relation

$$f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta)$$

on déduit

$$f\left(re^{-\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) - \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta).$$

Si donc on pose $\frac{1}{x} = u$, et que, considérant u comme variable, on lui donne pour module $r' = \frac{1}{r}$, l'on aura pour toute valeur de ce module inférieure à R,

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \xi(u) + \xi(0) + \frac{u}{1}\xi'(0) + \frac{u^2}{1.2}\xi''(0) + \ldots;$$

de là résulte, en série convergente,

$$f(x) = \xi(0) + \frac{x^{-1}}{1}\xi'(0) + \frac{x^{-2}}{1.2}\xi''(0) + \ldots.$$

Terminons par une application particulière et proposons-nous, pour exemple, de rechercher dans quels cas la fonction $(1 + x)^m$ peut être développée suivant la formule de Maclaurin.

On a

$$(1+x)^m = (1+re^{\theta\sqrt{-1}})^m = (1+r\cos\theta+\sqrt{-1}\,r\sin\theta)^m;$$

faisons

$$1+r\cos\theta = \rho\cos\alpha,$$
$$r\sin\theta = \rho\sin\alpha.$$

Nous pouvons en déduire

$$\rho = +\sqrt{1+r^2+2r\cos\theta}.$$

et, par suite,

$$(1+x)^m = (1+r^2+2r\cos\theta)^{\frac{m}{2}}(\cos m\alpha+\sqrt{-1}\sin m\alpha)$$

Cela posé, soit d'abord $m > 0$.

La continuité subsiste quel que soit r, la valeur 1 exceptée pour le cas de m fractionnaire. Quant à l'angle α, deux cas se présentent :

1°. Pour $r < 1$, α s'annule aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$;

2°. Pour $r > 1$, α et θ passent en même temps par les valeurs zéro et 2π.

Dans le premier cas, la condition des limites est satisfaite quel que soit αm. Dans le second, elle ne l'est qu'autant que m reste entier.

Soit ensuite $m < 0$.

Rien ne change par rapport à α. Quant à la continuité, elle ne subsiste à partir de zéro que jusqu'à la limite $R = 1$.

Il suit de là que le développement est possible quel que soit m pour toute valeur du module inférieure à l'unité, et quel que soit le module pour toute valeur de m entière et positive. Hors de ces cas, la série ne peut subsister sauf pour $r = 1$ et $m > 0$.

La valeur $r = 1$, considérée en elle-même et par rapport aux valeurs plus petites ou plus grandes, mérite un examen tout particulier.

Tant que r est inférieur ou égal à l'unité, α s'annule aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Pour $r = 1$ et $\theta = \pi$, il y a changement brusque, α passant tout à coup de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$. Néanmoins, comme le facteur $1+r^2-2r\cos\theta$ s'évanouit en même temps que le changement a lieu, la continuité persiste pour toute valeur positive de l'exposant m.

On voit ainsi que le développement suivant la série de Maclaurin ne cesse pas d'être convergent pour $r = 1$ et $m > 0$.

Lorsque r est supérieur à l'unité et m positif, les angles α et θ passent en même temps par les mêmes multiples de la circonférence. Si l'exposant m est une fraction irréductible de la forme $\frac{p}{q}$, l'on ne peut satisfaire à la condition des limites pour aucun intervalle moindre que $2q\pi$. Cet intervalle, ou tout autre plus grand, comprend la valeur $\theta = 2\pi$. Or on a

1°. Pour $r = 1$,

$$\psi(r, 2\pi) = 0;$$

2°. Pour $r > 1$,

$$\psi(r, 2\pi) = (1 + r)^{\frac{p}{q}} \sin 2\frac{p}{q}\pi.$$

Il y a donc changement brusque de détermination numérique, et impossibilité de franchir la valeur $r = 1$ sans solution de continuité.

En ce cas, le développement peut s'effectuer en série convergente ordonnée suivant les puissances descendantes et fractionnaires de la variable. La même conséquence s'applique aux valeurs négatives de l'exposant m, non plus à partir de $r = 1$, mais pour toute valeur de r supérieure à l'unité.

Bien que la considération de la dérivée soit superflue et indirecte, on observera qu'il peut être quelquefois plus simple d'y recourir. Il importe peu, d'ailleurs, qu'on opère sur la fonction ou sur sa dérivée, puisque l'une ne peut être développable en série convergente sans que l'autre ne le soit aussi, entre les mêmes limites. Nous citerons, comme exemples, les fonctions $l(1 + x)$, arc tang x, auxquelles on substitue avec avantage leurs dérivées respectives $(1+x)^{-1}$, $(1+x^2)^{-1}$.

En opérant directement et comme tout à l'heure, on aurait

$$\begin{aligned} l(1 + x) &= l(1 + r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta) \\ &= \tfrac{1}{2}\, l(1 + r^2 + 2r\cos\theta) + \alpha\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

la transformation serait plus compliquée pour

$$\begin{aligned} \text{arc tang } x = \varepsilon &= \sqrt{-1}\, l e^{-\varepsilon\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\, l(\cos\varepsilon - \sqrt{-1}\sin\varepsilon) \\ &= \sqrt{-1}\, l \frac{1 - x\sqrt{-1}}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

Expression numérique des intégrales définies qui se présentent, quand on cherche les termes généraux du développement des coordonnées d'une planète, dans son mouvement elliptique;

PAR M. F. LEFORT.
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

En désignant, conformément aux notations de la *Mécanique céleste*, par u l'anomalie excentrique, v l'anomalie vraie, nt l'anomalie moyenne d'une planète; par r le rayon vecteur, a le demi-grand axe, et e l'excentricité de son orbite, on a

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u,$$

$$nt = u - e \sin u.$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u;$$

d'où l'on déduit, par le développement en séries, à l'aide du théorème de Lagrange,

$$(1) \qquad u - nt = A_1 \sin nt + A_2 \sin 2nt + \ldots + A_i \sin int + \ldots.$$

$$(2) \qquad \frac{r}{a} = B_0 - B_1 \cos nt - B_2 \cos 2nt + \ldots + B_i \cos int + \ldots.$$

$$(3) \qquad v - nt = C_1 \sin nt + C_2 \sin 2nt + \ldots + C_i \sin int + \ldots.$$

On sait que les coefficients des sinus et cosinus des arcs multiples de l'anomalie moyenne peuvent être exprimés par des intégrales définies, de telle manière que

$$(4) \qquad A_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos i\,(u - e \sin u)\, du.$$

5) $$B_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1 - e\cos u)^2 \cos i(u - e\sin u)\, du,$$

6) $$C_i = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{i\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos i(u - e\sin u)}{1 - e\cos u}\, du,$$

i étant un nombre entier et positif.

On a, d'ailleurs,

$$B_0 = 1 + \tfrac{1}{2}e^2.$$

La détermination de ces intégrales définies a fait l'objet de deux Mémoires insérés par Poisson dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1825 et pour 1836. Le second Mémoire seul contient une méthode explicite pour la détermination numérique de ces intégrales.

Poisson a fait dépendre les valeurs de B_i et de C_i de celle de A_i et de ses dérivées relatives à e.

L'expression de B_i est fort simple : en effet, en différentiant A_i par rapport à e, et comparant le résultat à B_i, on trouve

$$B_i = -\frac{e}{i}\frac{dA_i}{de}\ [*].$$

L'expression de C_i est, au contraire, tellement compliquée que, tout en indiquant la manière de la composer, Poisson a dû renoncer à l'écrire. Elle ne permet pas, d'ailleurs, de saisir la loi de formation des nombres, ce qui est, si je ne me trompe, le véritable but de semblables recherches, aujourd'hui que la détermination numérique des coefficients a été poussée aussi loin au moins que le comportent les applications astronomiques.

Quant à l'intégrale A_i, Poisson la résout à l'aide de deux autres intégrales définies, dont il avait donné la solution dans un Mémoire considérable imprimé au XIXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

M. Bessel s'était occupé du même objet bien avant Poisson. Les

---

[*] C'est par une erreur d'impression que le facteur $\frac{1}{i}$ a été omis dans la formule (6) du Mémoire cité. (Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1836, page 6.

recherches de ce savant remontent, en effet, à 1816 : elles ont été publiées dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin.*

Dans son important Mémoire de 1824, M. Bessel, s'appuyant sur ses travaux antérieurs, détermine un assez grand nombre d'intégrales définies qui se rattachent à la théorie des perturbations planétaires, et il donne, entre autres, la solution de trois intégrales qui peuvent être facilement ramenées à celles que nous avons désignées par A_i, B_i, C_i.

L'expression trouvée par M. Bessel pour C_i n'est pas explicitement développée suivant les puissances ascendantes de l'excentricité, et elle ne fait pas connaître, plus que celle de Poisson, la loi de formation des coefficients numériques de ces diverses puissances, loi qui est très-apparente dans les séries relatives à A_i et B_i [*].

Après avoir attentivement examiné ces publications, dont j'ai dû la connaissance à deux savants qui m'honorent d'une bienveillante amitié, j'ai pensé que les géomètres ne verraient peut-être pas sans intérêt la solution à laquelle j'ai été conduit par des études sur le même sujet.

L'équation (6) peut être présentée sous une autre forme. En effet, en retranchant l'équation (1) de l'équation (3), multipliant les deux membres par $\sin int\, d.nt$, et intégrant entre les limites o et π, on trouve

$$C_i = A_i + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (v - u) \sin int\, d.nt;$$

mais si l'on pose

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

on a

$$v - u = \frac{2\lambda}{1}\sin u + \frac{2\lambda^2}{2}\sin 2u + \ldots + \frac{2\lambda^m}{m}\sin mu + \ldots = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2\lambda^m}{m}\sin mu.$$

On aura donc, en substituant à $v - u$ sa valeur, intégrant par parties,

[*] Je n'ai aucunement la prétention d'avoir analyse dans cet exposé rapide les savantes recherches de M. Bessel : je n'avais à considérer ici son Mémoire qu'au point de vue des trois intégrales dont je présente une solution.

et ayant égard aux limites,

$$C_i = A_i + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e\sin u) \cos mu\, du.$$

Ainsi les déterminations de A_i, B_i, C_i sont ramenées à la seule intégrale

$$\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u) \cos mu\, du,$$

puisqu'en faisant $m = 0$ on retombe sur l'intégrale relative à A_i, et que B_i se déduit de A_i par une simple dérivation par rapport à e.

Pour résoudre cette intégrale, nous remarquerons que

$$\cos i(u - e\sin u) = \cos(ie\sin u)\cos iu + \sin(ie\sin u)\sin iu,$$

$$\cos iu \cos mu = \tfrac{1}{2}\cos(i+m)u + \tfrac{1}{2}\cos(i-m)u.$$

$$\sin iu \cos mu = \tfrac{1}{2}\sin(i+m)u + \tfrac{1}{2}\sin(i-m)u,$$

en sorte que

$$\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(i+m)u\, du + \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(i+m)u\, du\right]$$

$$- \tfrac{1}{2}\left[\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(i-m)u\, du + \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(i-m)u\, du\right].$$

Mais

$$\cos(i-m)u = \cos(m-i)u,$$

$$\sin(i-m)u = -(\sin m - i)u.$$

Ainsi le problème est ramené à la détermination de

$$\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos xu\, du \pm \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin xu\, du,$$

x étant un nombre entier et positif de la forme $2y$ ou $2y+1$.

Par des formules connues,

$$\cos(ie\sin u) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \frac{i^{2r} e^{2r}}{1.2\ldots 2r} \sin^{2r} u,$$

$$\sin(ie\sin u) = \sum_{r=0}^{r=\infty} (-1)^r \frac{i^{2r+1} e^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)} \sin^{2r+1} u,$$

$$\sin^{2r} u = \frac{(-1)^r}{2^{2r}} \left\{ \begin{array}{l} \cos 2ru + \displaystyle\sum_{n=1}^{n=r-1} (-1)^n \frac{2r(2r-1)\ldots(2r-n+1)}{1.2\ldots n} \cos 2(r-n)u \\ + \dfrac{(-1)^r}{2} \dfrac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots r} \end{array} \right\},$$

$$\sin^{2r+1} u = \frac{(-1)^r}{2^{2r}} \left[\sin(2r+1)u + \sum_{n=1}^{n=r} (-1)^n \frac{(2r+1)2r\ldots(2r-n+2)}{1.2\ldots n} \sin(2r+1-2n)u \right].$$

Si nous posons, pour abréger,

$$A = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{2^{2r-1}} \frac{i^{2r} e^{2r}}{1.2\ldots 2r},$$

$$B = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{2^{2r}} \frac{i^{2r+1} e^{2r+1}}{1.2\ldots(2r+1)},$$

$$C = \sum_{n=1}^{n=r-1} (-1)^n \frac{2r(2r-1)\ldots(2r-n+1)}{1.2\ldots n},$$

$$D = \sum_{n=1}^{n=r} (-1)^n \frac{(2r+1)2r\ldots(2r-n+2)}{1.2\ldots n},$$

$$E = \frac{(-1)^r}{2} \frac{2r(2r-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots r},$$

nous aurons

$$\cos(ie\sin u) = 1 + A[\cos 2ru + C\cos 2(r-n)u + E],$$

$$\sin(ie\sin u) = B[\sin(2r+1)u + D\sin(2r+1-2n)u].$$

et l'on voit immédiatement que

$$\int_0^\pi \cos(ie \sin u) \cos(2y+1)\, u\, du = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin(ie \sin u) \sin 2yu\, du = 0.$$

Il suffit donc de trouver

$$\int_0^\pi \cos(ie \sin u) \cos 2yu\, du,$$

et

$$\int_0^\pi \sin(ie \sin u) \sin(2y+1) u\, du.$$

Or

$$\int_0^\pi \cos(ie \sin u) \cos 2yu\, du = \int_0^\pi \cos 2yu\, du$$

$$+ \mathrm{A} \int_0^\pi \cos 2ru \cos 2yu\, du + \mathrm{AC} \int_0^\pi \cos 2(r-n) u \cos 2yu\, du$$

$$+ \mathrm{A\,E} \int_0^\pi \cos 2yu\, du;$$

mais

$$\int_0^\pi \cos 2yu\, du = 0,$$

puisque, par hypothèse, y n'est pas nul; la seconde intégrale n'a de valeur que pour $y = r$, elle est alors égale à $\frac{\pi}{2}$, et A se réduit à

$$\frac{1}{2^{2y-1}} \frac{i^{2y} e^{2y}}{1.2\ldots 2y};$$

la troisième intégrale n'a de valeur que pour $r - n = y$, puisque $n < r$: sa valeur est alors $\frac{\pi}{2}$, et AC devient

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2y+2n-1}} \frac{i^{2y+2n} e^{2y+2n}}{1.2\ldots(2y+2n)} \frac{2y+2n}{1.2\ldots n} \frac{2y+2n-1\ldots 2y-n+1}{1.2\ldots n};$$

on a donc

$$\int_0^\pi \cos(ie \sin u) \cos 2yu\, du$$
$$= \pi \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2y}}{1.2\ldots 2y} \left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(2y+1)\ldots(2y+n)} \right].$$

On trouve de la même manière

$$\int_0^\pi \sin(ie \sin u) \sin(2y+1)u\, du$$
$$= \pi \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2y+1}}{1.2\ldots(2y+1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(2y+2)\ldots(2y+n+1)} \right].$$

Ainsi, x étant un nombre entier et positif, on a généralement

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(ie \sin u) \cos xu\, du + \int_0^\pi \sin(ie \sin u) \sin xu\, du \\ &= \pi \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^x}{1.2\ldots x} \left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(x+1)\ldots(x+n)} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(ie \sin u) \cos xu\, du - \int_0^\pi \sin(ie \sin u) \sin xu\, du \\ &= \pi \frac{\left(-\frac{ie}{2}\right)^x}{1.2\ldots x} \left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(x+1)\ldots(x+n)} \right]. \end{aligned} \right.$$

Quand les facteurs $\cos xu$ et $\sin xu$ sont remplacés par l'unité, on a simplement

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(ie \sin u)\, du \pm \int_0^\pi \sin(ie \sin u)\, du \\ &\qquad = \pi \left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{(1.2\ldots n)^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Les intégrales définies données par les formules (7), (8) et (9) condui-

sent immédiatement aux valeurs de A_i, B_i, C_i; en effet,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} A_i &= \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\,du \\ &= \frac{2}{i\pi}\left[\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos iu\,du + \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin iu\,du\right] \\ &= \frac{2}{i}\,\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{1.2\ldots i}\left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i+1)\ldots(i+n)}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} B_i &= -\frac{e}{i}\frac{dA_i}{de} \\ &= -\frac{2}{i}\,\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{1.2\ldots i}\left[1 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{(i+2n)\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i+1)\ldots(i+n)}\right], \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} C_i &= A_i + \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m \int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\,du \\ &= A_i + \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty}\lambda^m\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(i+m)u\,du \\ &+\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(i+m)u\,du\end{aligned}\right\} \\ &\quad + \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=i-1}\lambda^m\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(i-m)u\,du \\ &+\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(i-m)u\,du\end{aligned}\right\} \\ &\quad - \frac{2}{i\pi}\lambda^i\left[\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\,du + \int_0^\pi \sin(ie\sin u)\,du\right] \\ &\quad - \frac{2}{i\pi}\sum_{m=i+1}^{m=\infty}\lambda^m\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos(ie\sin u)\cos(m-i)u\,du \\ &+\int_0^\pi \sin(ie\sin u)\sin(m-i)u\,du\end{aligned}\right\}; \end{aligned}$$

substituant à A_i et aux intégrales définies leurs valeurs déjà trouvées,

et reduisant par la considération des limites relatives aux sommes $\sum$.

$$C_i = \frac{2}{i}\sum_{m=0}^{m=\infty} \lambda^m \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i+m}}{1.2\ldots(i+m)}\left[1-\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i+m+1)\ldots(i+m+n)}\right]$$

$$-\frac{2}{i}\sum_{m=1}^{m=i-1}\lambda^m\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{i-m}}{1.2\ldots(i-m+1)}\left[1-\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i-m+1)\ldots(i-m+n)}\right]$$

$$-\frac{2}{i}\sum_{m=i+1}^{m=\infty}(-1)^{m-i}\lambda^m\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{m-i}}{1.2\ldots(m-i)}\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(m-i+1)\ldots(m-i+n)}\right].$$

Pour obtenir C_i en série ordonnée suivant les puissances croissantes de e, il faut développer λ^m et effectuer le produit du développement par les seconds facteurs. Or

$$\lambda^m = \left(\frac{e}{2}\right)^m\left[1+\frac{m}{1}\left(\frac{e}{2}\right)^2-\frac{m(m+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^4-\ldots+\frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}+\ldots\right]$$

$$=\left(\frac{e}{2}\right)^m\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\right].$$

Si l'on remarque que

$$\begin{aligned}&(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots)\\&=a_0b_0+(b_0a_1+a_0b_1)x+(b_0a_2+a_1b_1+b_2a_0)x^2+\ldots\\&+(b_0a_n+a_{n-1}b_1+b_2a_{n-2}+\ldots+b_{n-1}a_1+a_0b_n)x^n+\ldots\end{aligned}$$

on en déduira

$$\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\right]\left[1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^{2n}}{1.2\ldots n(i+m+1)\ldots(i+m+n)}\right]$$

$$=1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\left\{\begin{aligned}&\frac{i^n}{1.2\ldots n(i+m+1)\ldots(i+m+n)}-\frac{i^{2(n-1)}}{1.2\ldots(n-1)(i+m+1)\ldots(i+m+n-1)}\frac{m}{i}+\ldots\\&+(-1)^\alpha\frac{i^{2(n-\alpha)}}{1.2\ldots(n-\alpha)(i+m+1)\ldots(i+m+n-\alpha)}\frac{m(m+\alpha+1)\ldots(m+2\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha}+\ldots\\&+(-1)^n\frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}\end{aligned}\right\}.$$

et, par suite,

$$
(12)\quad
\left\{
\begin{aligned}
C_i = {} & \frac{2}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^i \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{i^{i+m}\left(\frac{e}{2}\right)^{2m}}{1.2\ldots(i+m)} \\
& \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left\{
\begin{aligned}
& \frac{i^{2n}}{1.2\ldots n(i+m+1)\ldots(i+m+n)} + \ldots \\
& + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1.2\ldots(n-\alpha)(i+m+1)\ldots(i+m+n-\alpha)} \frac{m(m+\alpha+1)\ldots(m+2\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha} + \ldots \\
& + (-1)^n \frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}
\end{aligned}
\right\} \right\} \\
& + \frac{2}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^i \sum_{m=1}^{m=i} \frac{i^{i-m}(i-m+1)}{1.2\ldots(i-m+1)} \\
& \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left\{
\begin{aligned}
& \frac{i^{2n}}{1.2\ldots n(i-m+1)\ldots(i-m+n)} + \ldots \\
& + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1.2\ldots(n-\alpha)(i-m+1)\ldots(i-m+n-\alpha)} \frac{m(m+\alpha+1)\ldots(m+2\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha} + \ldots \\
& + (-1)^n \frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}
\end{aligned}
\right\} \right\} \\
& + \frac{2}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^i \sum_{m-i=1}^{m-i=\infty} (-1)^{m-i} \frac{i^{m-i}\left(\frac{e}{2}\right)^{2(m-i)}}{1.2\ldots(m-i)} \\
& \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{e}{2}\right)^{2n} \left\{
\begin{aligned}
& \frac{i^{2n}}{1.2\ldots n(m-i+1)\ldots(m-i+n)} + \ldots \\
& + (-1)^\alpha \frac{i^{2(n-\alpha)}}{1.2\ldots(n-\alpha)(m-i+1)\ldots(m-i+n-\alpha)} \frac{m(m+\alpha+1)\ldots(m+2\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha} + \ldots \\
& + (-1)^n \frac{m(m+n+1)\ldots(m+2n-1)}{1.2\ldots n}
\end{aligned}
\right\} \right\}
\end{aligned}
\right.
$$

Cette expression est compliquée, sans aucun doute, mais elle présente dans ses termes une loi de formation facile à saisir.

En calculant jusqu'à la neuvième puissance de e à l'aide de cette formule, on trouve

$$C_i = 2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4608}e^7 + \frac{6217}{368640}e^9 + \ldots.$$

On peut parvenir à l'expression de C_i, donnée ci-dessus, en partant de la formule (6) adoptée par MM. Bessel et Poisson. Il suffit de déve-

lopper $\frac{1}{1-e\cos u}$ en série croissante suivant les cosinus des multiples de u. On trouve facilement, par la méthode des coefficients indéterminés :

$$\frac{1}{1-e\cos u} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}(1 - 2\lambda\cos u + 2\lambda^2\cos 2u + \ldots + 2\lambda^m\cos mu + \ldots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m\cos mu\right),$$

et, par suite,

$$C_i = \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\,du - \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\,du$$

$$= A_i - \frac{2}{i\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty} 2\lambda^m\int_0^\pi \cos i(u - e\sin u)\cos mu\,du,$$

c'est-à-dire l'expression fondamentale à laquelle je suis arrivé par une autre méthode qui me paraît plus élégante et plus directe.

NOTE

SUR

LES CENTRES DES LIGNES ET DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Les géomètres savent qu'une ligne ou une surface ne peut offrir plus d'un centre sans en avoir un nombre infini. Les lois qui régissent leur distribution dans l'espace sont bien connues, mais elles ne s'appliquent qu'aux centres *généraux*, c'est-à-dire à des points C tels que, menant du point quelconque M du lieu géométrique le rayon MC, et portant sur son prolongement CM′ = CM, le point M′ ainsi obtenu soit aussi au lieu géométrique. Or, on conçoit sans peine des centres qui n'appartiendraient qu'à une seule nappe de surface ou branche de courbe, et ne jouiraient pas de la propriété qu'on vient de rappeler. Tel serait le cas de la courbe représentée par l'équation

$$(y^2 + x^2 - r^2)(y^2 - 2px + q^2) = 0.$$

laquelle se décompose en

$$y^2 + x^2 - r^2 = 0 \quad \text{et} \quad y^2 - 2px + q^2 = 0.$$

et donne un cercle associé à une conique. La première de ces courbes a son centre *particulier* qui échappe à la définition précédente, et la seconde, qui est une parabole, n'en a point. Rien de si facile que de former de toutes pièces des équations de ce genre; elles auront pour caractère commun d'être décomposables en équations plus simples.

Cela posé, je dis que *réciproquement, si un lieu géométrique, surface ou ligne, est doué d'un centre particulier à quelqu'une de ses parties, nappe ou branche, son équation sera décomposable en équations plus simples*. Il est bien entendu qu'on ne veut parler ici que d'équations

ramenées à la forme rationnelle et entière par rapport aux variables qu'elles renferment, hypothèse qu'il est toujours permis de faire.

Soit donc, s'il se peut, un lieu géométrique renfermant un centre particulier, représenté par une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

ramenée à la forme rationnelle et entière par rapport à x, y, z. Ce sera une surface, mais le raisonnement que je vais faire s'appliquera également aux lignes.

Si $F(x, y, z)$ est irréductible, il le sera encore en transportant l'origine des coordonnées au centre particulier, c'est-à-dire en changeant x, y, z en $x + a$, $y + b$, $z + c$, a, b, c étant les coordonnées de ce centre. Ayant donc l'équation

$$F(x + a, y + b, z + c) = 0,$$

le problème à résoudre se réduit à savoir si l'origine des coordonnées peut être un centre particulier. Pour qu'il en fût ainsi, il faudrait qu'en menant un rayon quelconque, on trouvât sur sa direction deux segments égaux et opposés, parmi tous ceux déterminés par la rencontre de la surface entière. En d'autres termes, posant

$$x = mz, \quad y = nz,$$

équations d'un rayon qui passe par l'origine, la transformée à une inconnue

$$F(mz + a, nz + b, z + c) = 0,$$

que, pour plus de simplicité, nous écrirons, en supprimant la parenthèse, $F = 0$, aura au moins deux racines égales et de signes contraires, et le nombre de ces racines sera inférieur au degré de $F(x, y, z)$, sans quoi le centre considéré, au lieu d'être *particulier*, serait un centre *général*, contrairement à l'hypothèse. Si donc nous changeons le signe de z dans

$$F(mz + a, nz + b, z + c) = 0,$$

nous aurons une nouvelle équation

$$F(-mz + a, -nz + b, -z + c) = 0,$$

dont quelques racines, et non toutes, appartiendront à la précédente. D'où il suit que leurs premiers membres auront un commun diviseur rationnel qui, égalé à zéro, donnerait toutes les racines égales et de signes contraires dont il s'agit, et ne donnerait que celles-là. L'algèbre nous apprend que ce plus grand commun diviseur ne peut qu'être entier en z; donc en le séparant, par la division, de $F = 0$, l'équation restante ne pourra plus donner de racines relatives au centre particulier supposé, c'est-à-dire égales deux à deux et de signes contraires.

Ceci bien compris, je nomme φ le commun diviseur, et ψ le quotient de la division de F par φ, de manière que $F = \varphi.\psi$. On sait que φ et ψ ne peuvent qu'être *rationnels* en m et n; je dis, de plus, qu'ils sont *entiers* par rapport à ces quantités. Car on peut supposer que les coefficients des diverses puissances de z dans F sont premiers entre eux, et que de φ et ψ on ait fait disparaître tous les facteurs indépendants de z, ce qui comprend les dénominateurs. Comme $F = 0$ doit donner toutes les racines de $\varphi = 0$ et de $\psi = 0$, et n'en doit donner ni plus ni moins, il est bien évident que F sera du même degré en z que le produit $\varphi.\psi$. Toute la différence, s'il y en avait une, proviendrait de quelque facteur indépendant de z. Or, par hypothèse, aucun facteur de cette espece ne subsiste plus dans F, φ, ψ; donc on a identiquement

$$F = \varphi.\psi,$$

φ et ψ étant entiers en z, m, n.

Il s'ensuit que le degré des fonctions φ et ψ, pris non-seulement par rapport à z, mais aussi par rapport à m et n, sera moindre que celui de F, car le degré du produit $\varphi.\psi$ est égal à la somme de ceux de φ et de ψ; or le degré de F ainsi considéré n'est autre que celui de l'équation du lieu géométrique proposé en x, y et z; donc, en remplaçant enfin m et n par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, F reproduira $F(x+a, y+b, z+c)$, et φ et ψ deviendront des polynômes d'un degré moindre. Comme la même décomposition subsiste à quelque origine que les coordonnées soient rapportées, je conclus que *le lieu représenté par l'équation*

$$F(x, y, z) = 0,$$

supposée irréductible, ne saurait avoir un centre particulier.

On voit par là que les centres généraux sont les seuls qu'il soit nécessaire de considérer dans les lieux géométriques, lorsque leurs équations ont reçu la forme la plus simple; et si la discussion vient à faire reconnaître un centre particulier, c'est qu'il y a d'autres réductions possibles, auxquelles on parviendrait par le procédé qui ressort de la démonstration précédente, et qui consiste, après avoir transporté l'origine des coordonnées au centre particulier, à faire tour à tour

$$x = mz,\ y = nz \quad \text{et} \quad x = -mz,\ y = -nz,$$

puis à chercher l'équation

$$\varphi = 0,$$

d'où dépendent les racines communes aux deux transformées ainsi obtenues. On réduira par ce moyen la proposée à deux autres équations

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

dont la première, après substitution de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ au lieu de m et n, appartiendra exclusivement au lieu géométrique décrit autour du centre.

SUR L'ÉVALUATION DE QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES PAR DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. Dans son *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, chap. 35, Legendre a recueilli un grand nombre d'intégrales définies, dont les valeurs peuvent être assignées par ces transcendantes. Les formules que cet illustre géomètre a rassemblées dans ce chapitre de son grand ouvrage semblent renfermer les solutions de plusieurs problèmes relatifs aux aires et aux volumes de surfaces courbes. On y trouve les expressions pour l'aire de l'ellipsoïde, ou (ce qui est la même chose) pour celle de la surface optique qui s'appelle d'*élasticité* [*], et même encore pour le volume de cette dernière surface, comme on le verra tout à l'heure. La méthode employée par Legendre consiste le plus souvent à identifier les résultats obtenus par l'évaluation d'une intégrale double, en prenant les deux variables dans un ordre différent; ce qui conduit assez simplement aux formules dont il s'agit. Cependant, j'ai remarqué qu'on peut présenter, par une transformation convenable, les démonstrations de l'illustre auteur sous une forme plus directe, conformément aux principes dont on fait ordinairement usage dans la détermination des intégrales définies. Il serait fastidieux de démontrer toutes les formules de Legendre en détail, en sorte que je me contenterai d'indiquer comment ses théorèmes principaux peuvent

[*] L'identité de l'aire de la surface d'élasticité avec celle de l'ellipsoïde fut démontrée pour la première fois par M. D.-B. Tortolini, et ensuite par moi, mais sans avoir eu connaissance des travaux du savant géomètre de Rome. (*Voir* le Journal de M. Crelle, tome XXXI, page 12, où se trouve le Mémoire de M. Tortolini, intitulé : *Nuove applicazioni del calcolo integrale relative alla quadratura delle superficie curve, e cubatura de solidi.*)

être obtenus. J'ajouterai aussi quelques autres résultats analogues à ceux dont on vient de parler, et qui dérivent aisément de l'équation fondamentale pour la comparaison des transcendantes elliptiques.

2. Dans ce qui suit nous désignerons, suivant l'usage, la quantité $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ par $\Delta(k, \varphi)$, ou bien simplement par Δ.

Considérons d'abord l'intégrale définie

$$u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi,$$

d'où, en différentiant par rapport à m, on a

$$\frac{du}{dm} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{(1+m^2)\cos^2\varphi + (1+m^2-m^2k^2)\sin^2\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{(1+m^2)(1+m^2-m^2k^2)}},$$

en sorte que

$$u = \frac{\pi}{2}\int_0^m \frac{dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+m^2-m^2k^2)}},$$

et, en faisant

$$m = \operatorname{tang}\theta,$$

on trouve

$$(1)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{F}(k, \theta).$$

On peut déduire de là la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{cotang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi,$$

car elle est manifestement égale à

$$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{F}(k) - \int_0 \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi,$$

en sorte que, λ étant un angle donné par la relation

$$m\sqrt{1-k^2}\operatorname{tang}\lambda = 1,$$

on a

$$(2)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{cotang} = m\Delta)}{\Delta}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{F}(k, \lambda).$$

3. Faisons maintenant

$$m = \operatorname{cotang}\alpha, \quad k^2 = 1 - \frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{\operatorname{tang}^2\beta},$$

et prenons un angle ω tel que

$$\operatorname{cotang}^2\omega = \operatorname{cotang}^2\alpha\cos^2\varphi + \operatorname{cotang}^2\beta\sin^2\varphi,$$

ce qui donnera

$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha\, d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}}.$$

Substituant ces expressions dans l'équation (2), on trouvera, en se rappelant que les limites de ω sont α et β, et que $\lambda = \beta$,

$$(3) \qquad \int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega\sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{2\sin\beta\cos\alpha} F(k, \beta),$$

formule fondamentale qui se trouve dans le *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, chap. 35, n° 235, et qui est signalée par Legendre comme remarquable.

4. Considérons encore l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc\,tang}(m\Delta)}{\Delta^3} d\varphi;$$

en la désignant par u, on aura

$$\frac{du}{dm} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta^3(1 + m^2\Delta^2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-k^2}} - \frac{\pi m^2}{2} \frac{1}{\sqrt{(1+m^2)(1+m^2-k^2m^2)}};$$

donc, à cause de

$$\int \frac{\operatorname{tang}^2\theta\, d\theta}{\Delta(k, \theta)} = \frac{\operatorname{tang}\theta\,\Delta(k, \theta) - E(k, \theta)}{1 - k^2},$$

on trouvera, en faisant $m = \operatorname{tang}\theta$ et en intégrant,

$$(4) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc\,tang}(m\Delta)}{\Delta^3} d\varphi = \frac{\pi}{2(1-k^2)} E(k, \theta) - \frac{\pi\operatorname{tang}\theta}{2(1-k^2)}\left[\Delta(k, \theta) - \sqrt{1-k^2}\right];$$

d'où l'on déduit aisément

$$(5) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{arc\,cotang}(m\Delta)}{\Delta^3} d\varphi = \frac{\pi}{2(1-k^2)} E(k, \lambda) - \frac{\pi\operatorname{cotang}\lambda}{2(1-k^2)}\left[1 - \Delta(k, \lambda)\right].$$

λ étant donné par l'équation

$$m\sqrt{1-k^2}\,\mathrm{tang}\,\lambda = 1.$$

5. Transformons l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{arc}(\mathrm{tang} = m\Delta)}{\Delta^n}\,d\varphi,$$

en faisant

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{\mathrm{cotang}\,\psi}{\sqrt{1-k^2}},$$

et l'on verra facilement qu'il en résultera la relation suivante

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{arc}(\mathrm{cotang} = m\Delta)}{\Delta^{-n+2}}\,d\varphi = (1-k^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{arc}(\mathrm{tang} = m'\Delta)}{\Delta^n}\,d\varphi,$$

m et m' étant liés par l'équation

$$mm'\sqrt{1-k^2} = 1,$$

ou bien encore

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{arc}(\mathrm{tang} = m\Delta)}{\Delta^{-n+2}}\,d\varphi + (1-k^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{arc}(\mathrm{tang} = m'\Delta)}{\Delta^n}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta^{n-2}\,d\varphi.$$

Donc, en supposant que $n = 3$, on transformera l'équation (4) dans

$$(6)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{arc}(\mathrm{cotang} = m\Delta)\,\Delta\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\mathrm{E}(k,\lambda) - \frac{\pi}{2}\mathrm{tang}\,\lambda\,[\Delta(k,\lambda) - \sqrt{1-k^2}],$$

et, si l'on fait $n = -1$, l'équation (5) donnera

$$(7)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{arc}(\mathrm{tang} = m\Delta)\,\Delta\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\mathrm{E}(k,\zeta) - \frac{\pi}{2}\mathrm{cotang}\,\zeta\,[1 - \Delta(k,\zeta)].$$

6. Transformons l'équation (6) par les mêmes substitutions dont nous avons déjà fait usage dans le n° 3, et l'on en déduira

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega\,d\omega}{\mathrm{tang}^2\omega\sqrt{\sin^2\omega - \sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}} = \frac{\pi}{2\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\sin\beta}\left[\mathrm{E}(k,\beta) + \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha}\right].$$

Donc, en ajoutant la valeur de

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}},$$

qu'on tire de la formule (3), on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\alpha^\xi \frac{\omega d\omega}{\sin^2\omega\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}} \\ &-\frac{\pi}{2}\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin^2\alpha\sin\beta}+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}F(k,\beta)+\frac{\pi\cos\alpha}{2\sin^2\alpha\sin\beta}E(k,\beta),\end{aligned}\right.$$

formule donnée par Legendre.

7. Au moyen de l'équation (5) on trouve, de la même manière,

$$\int_\alpha^\xi \frac{\omega\tang^2\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}$$
$$=\frac{\pi\sin\beta}{2\cos\alpha\cos^2\beta}[E(k,\beta)-\cotang\beta+\cotang\beta\cos\beta\sec\alpha],$$

ce qui conduit aisément à la formule suivante

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\alpha^\xi \frac{\omega d\omega}{\cos^2\omega\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}} \\ &=\frac{\pi}{2}\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos^2\alpha\cos\beta}+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}F(k,\beta)+\frac{\pi}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\cos^2\beta}E(k,\beta).\end{aligned}\right.$$

Cette intégrale, que l'on doit à Legendre, exprime, comme il a été déjà montré, l'aire totale d'un ellipsoïde, ou bien celle de la surface optique nommée d'élasticité.

8. L'intégrale générale

$$\int_\alpha^\xi \frac{\omega d\omega}{\cos^{2n}\omega\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}},$$

que l'on désignera par U_{2n}, ne dépend que de U_2 et U_0 [quantités déjà calculées dans les équations (3) et (9)], comme Legendre l'a prouvé par une formule de réduction [*], laquelle donne, pour le cas de $n=2$,

$$U_4=\frac{\pi}{12}\frac{(\cos\alpha-\cos\beta)^2}{\cos^3\alpha\cos^2\beta}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}\right)U_2-\frac{1}{3}\left(\frac{1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}\right)U_0.$$

---

[*] Voici la formule dont il s'agit :

$$\begin{aligned}&(2n+1)\cos^2\alpha\cos^2\beta\,U_{2n+2}\\ &=2n(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta)U_{2n}-(2n-1)(1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta)U_{2n-2}\\ &+(2n-2)U_{2n-4}+\int_\alpha^\xi\frac{\sin\omega\sqrt{\sin^2\omega-\sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\omega}}{\cos^{2n-4}\omega}d\omega.\end{aligned}$$

(*Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 314.

Cette intégrale exprime le volume de la surface d'élasticité, comme on le verra aisément de la manière suivante.

9. L'équation de cette surface est, comme l'on sait,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^2 = a^2 \sin^2\theta \cos^2\psi + b^2 \sin^2\theta \sin^2\psi + c^2 \cos^2\theta;$$

d'où l'on conclut que la huitième partie (V) de son volume entier aura pour expression l'intégrale double

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(a^2 \sin^2\theta \cos^2\psi + b^2 \sin^2\theta \sin^2\psi + c^2 \cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} \sin\theta\, d\theta\, d\psi;$$

si l'on intègre par rapport à θ, en faisant, pour abréger,

$$P = a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi, \quad Q = a^2 \cos^2\psi + b^2 \sin^2\psi - c^2,$$

on aura donc

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\tfrac{1}{12}c^3 + \tfrac{1}{8}cP + \tfrac{1}{8}\frac{P^2}{\sqrt{Q}}\operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{Q}{P}}\right)\right]d\psi.$$

Posant ensuite

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{Q}{P}},$$

ce qui donne

$$P = c^2 \operatorname{séc}^2\omega, \quad Q = c^2 \operatorname{tang}^2\omega,$$

et

$$d\psi = \frac{-c^2}{ab}\frac{\operatorname{tang}\omega d\omega}{\sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{a^2} - \sin^2\omega\right)\left(\sin^2\omega - \frac{b^2-c^2}{b^2}\right)}}.$$

on trouvera, en se rappelant que $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} P d\psi = \frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)$,

$$8V = \tfrac{1}{3}\pi c^3 + \tfrac{1}{4}\pi c(a^2 + b^2) + \frac{c^3}{ab}\int_\alpha^\beta \frac{\omega d\omega}{\cos^4\omega\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}},$$

ou

$$\cos\alpha = \frac{c}{b}, \quad \cos\beta = \frac{c}{a}.$$

Donc on a finalement, toutes réductions faites,

$$8V = \frac{\pi bc}{6a}(a^2+2b^2+2c^2) + \frac{\pi}{b}\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}}[(a^2+b^2+c^2)(c^2+c^4-a^2b^2]F(k, \beta)$$

$$-\frac{\pi}{3}\sqrt{a^2-c^2}(a^2+b^2+c^2)E(k, \beta),$$

où

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}.$$

Cette formule s'accorde avec celle donnée par M. Tortolini, dans le Journal de M. Crelle, tome XXXI, page 28.

10. Soit encore

$$u = \int_\alpha^\beta \log\left(\frac{1+m\sin\omega}{1-m\sin\omega}\right)\frac{\cos\omega d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}},$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dm} = \int_\alpha^\beta \frac{2\sin\omega\cos\omega d\omega}{(1-m^2\sin^2\omega)\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{(1-m^2\sin^2\alpha)(1-m^2\sin^2\beta)}}.$$

Donc, en faisant $\sin\theta = m\sin\beta$, et en intégrant, on trouve

(10) $$u = \frac{\pi}{\sin\beta}F\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \theta\right).$$

De la même manière, on peut montrer que

(11) $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left(\frac{1+m\Delta}{1-m\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta} = \pi F(k', \theta),$$

où

$$k' = \sqrt{1-k}, \quad \text{et} \quad m = \sin\theta.$$

11. La fonction des trois arguments k, θ, φ,

$$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{arc(tang} = \Delta\operatorname{tang}\theta}{\Delta}d\varphi.$$

que nous désignerons par $U_k(\theta, \varphi)$, jouit d'une propriété remarquable.

dont l'équation (1) n'est qu'un cas particulier, savoir, elle est une fonction symétrique des quantités θ et φ.

Pour le faire voir, il faut seulement différentier U par rapport à θ, ce qui donne

$$\frac{dU}{d\theta} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + (1 - k^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi} = \frac{\operatorname{arc}[\operatorname{tang} = \operatorname{tang}\varphi\,\Delta(k, \theta)]}{\Delta(k, \theta)}.$$

On conclut donc que

$$(12) \qquad U_k(\theta, \varphi) = U_k(\varphi, \theta),$$

et, en particulier,

$$U_k(\theta, \tfrac{1}{2}\pi) = U_k(\tfrac{1}{2}\pi, \theta),$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (1).

Semblablement, en désignant l'intégrale

$$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{cotang} = \Delta \operatorname{tang}\theta)}{\Delta}\, d\varphi$$

par $V_k(\theta, \varphi)$, on peut déduire l'équation suivante,

$$(13) \qquad V_k(\theta, \varphi) - V_k(\varphi, \theta) = \frac{\pi}{2} F(k, \delta),$$

où

$$\delta = amp\,[F(k, \varphi) - F(k, \theta)].$$

Il suit de l'équation (2) que

$$\frac{\pi}{2} F(k, \delta) = V_k(\gamma, \tfrac{1}{2}\pi),$$

la valeur de γ étant celle pour laquelle

$$F(k, \gamma) + F(k, \delta) = F(k);$$

il en résulte

$$(14) \qquad V_k(\theta, \varphi) - V_k(\varphi, \theta) = V_k(\gamma, \tfrac{1}{2}\pi).$$

12. On peut tirer de l'équation (11) deux développements pour une fonction elliptique de première espèce. En effet, on a

$$\frac{1}{\Delta}\log\left(\frac{1 + m\Delta}{1 - m\Delta}\right) = 2\left(m + \tfrac{1}{3}m^3\Delta^2 + \tfrac{1}{5}m^5\Delta^4 + \ldots\right).$$

En désignant donc par $\frac{\pi}{2} A_{2n}$ la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^n \, d\varphi,$$

on trouve, k' étant le complément de k,

$$(15) \qquad F(k', \theta) = \sin\theta + \tfrac{1}{3} A_2 \sin^3 \theta + \tfrac{1}{5} A_4 \sin^5 \theta + \ldots.$$

D'ailleurs, faisons

$$\sin\theta = \sqrt{-1} \tang \omega,$$

ce qui donne

$$F(k', \theta) = \sqrt{-1}\, F(k, \omega),$$

et l'on aura

$$(16) \qquad F(k, \omega) = \tang \omega - \tfrac{1}{3} A_2 \tang^3 \omega + \tfrac{1}{5} A_4 \tang^5 \omega - \ldots.$$

A l'aide de l'équation (15) on peut déterminer, avec facilité, la somme d'une série donnée par Legendre pour l'évaluation de l'aire de l'ellipsoïde. La huitième partie de l'aire totale de cette surface a pour expression (*voir* le *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 351

$$\tfrac{1}{2}\pi ab \left[1 - \tfrac{1}{3} P' - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{5} P'' - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{7} P''' - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{9} P'''' - \ldots\right],$$

où

$$\frac{\pi}{2} P^{(n)} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} \sin^2 \varphi + \frac{b^2 - c^2}{b^2} \cos^2 \varphi\right)^n d\varphi,$$

a, b, c étant les demi-axes de l'ellipsoïde.

Maintenant, posons

$$u = m + \tfrac{1}{3} m^3 P' + \tfrac{1}{5} m^5 P'' + \ldots,$$

et il est clair, d'après ce que l'on vient de montrer, que

$$u = \frac{1}{\sqrt{\delta}} F\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \theta\right),$$

en faisant, conformément aux notations de Legendre,

$$\delta = \frac{a^2 - c^2}{a^2}, \qquad \varepsilon = \frac{b^2 - c^2}{b^2},$$

et

$$\sin\theta = m\sqrt{\delta}.$$

On a d'ailleurs, S étant la huitième partie de la surface ellipsoïdale,

$$S = \tfrac{1}{2}\pi ab\left(1 - \int_0^1 \frac{u-m}{m^3}\,dm\right),$$

et

$$\int_0^1 \frac{u-m}{m^3}\,dm = \sqrt{\delta}\int_0^{\text{arc}\sin=\sqrt{\delta}} \frac{F\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \varphi\right) - \sin\varphi}{\sin^3\varphi}\cos\varphi\,d\varphi,$$

intégrale qu'il s'agit de déterminer.

Pour cela, on a évidemment

$$2\int \frac{F(k,\varphi)\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\,d\varphi = \int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \frac{F(k,\varphi)}{\sin^2\theta},$$

et

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\Delta(k,\theta)} = F(k,\varphi) - E(k,\varphi) - \text{cotang}\,\varphi\,\Delta(k,\varphi).$$

Donc, en se rappelant que $\int_0^1 \frac{u-m}{m^3}\,dm$ s'évanouit pour m ou $\theta = 0$, on a, pour la valeur de cette intégrale,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\delta}\left[\frac{2}{\sin\varphi} - \text{cotang}\,\varphi\,\Delta(k,\varphi) - \text{cotang}^2\varphi\,F(k,\theta) - E(k,\varphi)\right].$$

où l'on doit prendre $\sin\theta = \sqrt{\delta}$, à cause de $m = 1$; on peut, par conséquent, mettre cette valeur sous la forme

$$1 - \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{ab} - \frac{1}{2\sin\varphi}\left[\cos^2\varphi\,F(k,\varphi) + \sin^2\varphi\,E(k,\varphi)\right];$$

en sorte que l'on obtient finalement

$$S = \tfrac{1}{4}\pi c^2 + \tfrac{1}{4}\pi\frac{ab}{\sin\varphi}\left[\cos^2\varphi\,F(k,\varphi) + \sin^2\varphi\,E(k,\varphi)\right],$$

ou

$$\cos\varphi = \frac{c}{a}, \qquad k^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

13. Ayant terminé les remarques que nous nous étions proposé de faire par rapport aux intégrales contenues dans le chap. XXXV du *Traité des Fonctions elliptiques*, nous allons démontrer quelques autres

résultats qui ont beaucoup d'analogie avec ceux dont nous venons de nous occuper; ils dérivent tous de l'équation suivante

$$(17)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\Delta)\frac{d\varphi}{\Delta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta},$$

que l'on démontre immédiatement en substituant, au lieu de φ, un angle ψ donné par l'équation

$$\sqrt{1-k^2}\,\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\psi = 1.$$

Pour faire application de cette formule, on supposera d'abord que

$$f(\Delta) = \log\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

et l'on aura

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left[\log\left(\frac{1}{k'}\right) - \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right]\frac{d\varphi}{\Delta},$$

k' étant égale à $\sqrt{1-k^2}$, en sorte que

$$(18)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right)\mathrm{F}(k).$$

14. En désignant par $\Lambda(k,\varphi)$ la fonction indéfinie

$$\int_0^{\varphi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{d\varphi}{\Delta},$$

on peut trouver une relation entre deux fonctions Λ, qui est une généralisation de la propriété contenue dans la formule (18).

Soit

$$\Lambda(k,\varphi) - \Lambda(k,\psi) + \alpha = \Phi,$$

où α est une constante, et où φ et ψ sont liés par la relation

$$k'\,\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,\psi = 1,$$

ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0,$$

on aura, par la différentiation,

$$\left\{\log\left[\frac{1}{\Delta(\varphi)}\right] + \log\left[\frac{1}{\Delta(\psi)}\right]\right\}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = d\Phi.$$

Maintenant on a

$$\Delta(\varphi)\Delta(\psi) = k';$$

d'où il résulte que

$$\Phi = \log\left(\frac{1}{k'}\right) F(k, \varphi).$$

Pour déterminer la valeur de la constante, soit $\varphi = 0$, ce qui donne

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi,$$

et, par conséquent,

$$\alpha = \Lambda(k, \tfrac{1}{2}\pi);$$

on a donc enfin

$$(19) \qquad \Lambda(k, \varphi) - \Lambda(k, \psi) + \Lambda(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \log\left(\frac{1}{k'}\right) F(k, \varphi).$$

Si l'on y substitue pour $\Lambda(k, \frac{1}{2}\pi)$ sa valeur tirée de la formule (18), on transformera cette équation dans la suivante

$$(20) \qquad \Lambda(k, \varphi) - \Lambda(k, \psi) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right) F(k, \delta).$$

où

$$\delta = \text{amp.}\left[F(k, \varphi) - F(k, \psi)\right].$$

15. En se reportant à l'équation (18), on verra, par l'intégration par parties, que

$$\log\left(\frac{1}{k'}\right) F(k) - k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(k, \varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right) F(k),$$

en sorte que

$$(21) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(k, \varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2k^2}\log\left(\frac{1}{k'}\right) F(k).$$

On peut encore déduire d'autres intégrales de l'équation (18). Si l'on

différentie cette équation par rapport à k, on trouvera

$$2k\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3}+2k\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}=\frac{kF(k)}{k'^2}+\log\left(\frac{1}{k'}\right)\frac{dF(k)}{dk}.$$

Or on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3}=\frac{1}{kk'^2}\left[E(k)-k'^2F(k)\right],$$

et

$$\frac{dF(k)}{dk}=\frac{1}{kk'^2}\left[E(k)-k'^2F(k)\right],$$

en sorte qu'on trouvera, après quelques réductions,

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left(\frac{1}{\Delta}\right)\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3}\\&=\frac{1}{2k^2k'^2}\left\{\left[1+k'^2-k'^2\log\left(\frac{1}{k'}\right)\right]F(k)-\left[2-\log\left(\frac{1}{k'}\right)\right]E(k)\right\}.\end{aligned}\right.$$

16. Soient k, k_1 et φ, φ_1, respectivement, les modules et les amplitudes de deux fonctions elliptiques qui satisfont à l'équation

$$F(k_1,\varphi_1)=(1+k')F(k,\varphi),$$

et l'on aura, comme on sait,

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'},\quad \operatorname{tang}(\varphi_1-\varphi)=k'\operatorname{tang}\varphi,$$

et

$$\Delta(k,\varphi)\Delta(k_1,\varphi_1)=\cos^2\varphi+k'\sin^2\varphi.$$

D'ailleurs, $\varphi_1=\pi$, lorsque $\varphi=\frac{\pi}{2}$, en sorte que

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left[\frac{1}{\Delta(k_1,\varphi_1)}\right]\frac{d\varphi_1}{\Delta(k_1,\varphi_1)}=(1+k')\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\left[\frac{\Delta(k,\varphi)}{\cos^2\varphi+k'\sin^2\varphi}\right]\frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}.$$

Mais, d'après la formule (18), le premier membre de cette équation est égal à

$$\log\left(\frac{1}{k_1}\right)F(k_1),\quad\text{ou à}\quad\frac{1+k'}{2}\log\left(\frac{1+k'}{2\sqrt{k'}}\right)F(k).$$

et le second est égal à

$$(1 + k')\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\cos^2\varphi + k'\sin^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta(k, \varphi)} - \frac{1 + k'}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right) F(k);$$

on trouve donc

$$23 \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\cos^2\varphi + k'\sin^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + k'}{2k'\sqrt{k'}}\right) F(k).$$

A l'aide de l'intégration par parties, on peut déduire de la formule 23 l'intégrale suivante :

$$24) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F(k, \varphi)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi + k'\sin^2\varphi} = \frac{1}{4(1 - k')}\log\left[\frac{2}{(1 + k')\sqrt{k'}}\right] F(k).$$

17. Transformons l'équation (17) par les mêmes substitutions que nous avons employées dans le n° **3**, c'est-à-dire posons

$$k^2 = 1 - \frac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta}; \quad \cot^2\omega = \cot^2\alpha\,(1 - k^2\sin^2\varphi),$$

et il en résultera

$$\int_\alpha^\xi \frac{f(\tang\alpha\cot\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \int_\alpha^\xi \frac{f(\cot\beta\tang\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}}.$$

Dans cette équation, soit $f(\tang\alpha\cot\omega)$ une fonction elliptique de première espèce, d'un module arbitraire c, et d'une amplitude ξ qui satisfasse à l'équation

$$\tang\xi = \left(\frac{\tang\beta}{\tang\alpha}\right)^n (\tang\alpha\cot\omega)^{2n}\frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

n étant un nombre quelconque. On aura donc

$$\int_\alpha^\xi \frac{F(c, \xi)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \int_\alpha^\xi \frac{F(c, \xi')\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}}.$$

ξ' étant donné par l'équation

$$\tang\xi' = \left(\frac{\tang\beta}{\tang\alpha}\right)^n (\cot\beta\tang\omega)^{2n}\frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

en sorte que

$$\sqrt{1-c^2}\,\mathrm{tang}\,\xi\,\mathrm{tang}\,\xi' = 1,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{F}(c,\xi) + \mathrm{F}(c,\xi') = \mathrm{F}(c);$$

d'après cela, en se rappelant que

$$\int_\alpha^\beta \frac{d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}} = \frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}\mathrm{F}(k),$$

ou

$$k^2 = 1 - \frac{\mathrm{tang}^2\alpha}{\mathrm{tang}^2\beta},$$

on trouve

$$25)\qquad \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{F}(c,\xi)d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}} = \frac{1}{2\cos\alpha\sin\beta}\mathrm{F}(c)\mathrm{F}(k).$$

Si l'on fait, dans l'équation pour ξ,

$$n = -\tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad c^2 = 1 - \cot^2\alpha\cot^2\beta,$$

on aura

$$\xi = \omega,$$

et, par conséquent,

$$26)\qquad \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{F}(c,\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}} = \frac{1}{2\cos\alpha\sin\beta}\mathrm{F}(c)\mathrm{F}(k),$$

où α et β sont liés avec c par l'équation

$$\sqrt{1-c^2}\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta = 1,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mathrm{F}(c,\alpha) + \mathrm{F}(c,\beta) = \mathrm{F}(c).$$

18. Maintenant, supposons que $f(\mathrm{tang}\,\alpha\cot\omega)$ soit une fonction elliptique de l'espèce seconde $\mathrm{E}(c,\omega)$, c^2 étant égale à $1-\cot^2\alpha\cot^2\beta$, et l'on aura

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{E}(c,\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}} = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{E}(c,\omega')\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega-\sin^2\alpha)(\sin^2\beta-\sin^2\omega)}}.$$

ou

$$\sqrt{1-c^2}\,\mathrm{tang}\,\omega\,\mathrm{tang}\,\omega' = 1,$$

ce qui donne

$$\mathrm{E}(c,\omega) + \mathrm{E}(c,\omega') - \mathrm{E}(c) = c^2 \sin\omega \sin\omega',$$

et, par conséquent,

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{E}(c,\omega)\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{1}{2\cos\beta\sin\beta}\,\mathrm{E}(c)\,\mathrm{F}(h)$$

$$+ \tfrac{1}{2}c^2 \int_\alpha^\beta \frac{\sin\omega\sin\omega'\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}}.$$

Or on a

$$\sin\omega' = \frac{\cos\omega}{\sqrt{1-c^2\sin^2\omega}};$$

substituant cette expression dans la dernière intégrale, et mettant ensuite pour ω sa valeur en φ, on trouve qu'elle sera transformée dans cette autre,

$$\mathrm{tang}\,\alpha \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-h^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)(1-h^2\sin^2\beta\sin^2\varphi)}}.$$

Si l'on y fait encore

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,\mathrm{tang}\,\psi,$$

on aura

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-h^2\cos^2\alpha\sin^2\varphi)(1-h^2\sin^2\beta\sin^2\varphi)}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\left(1-\frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2 2\alpha}\right)\sin^2\psi}};$$

donc

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin\omega\sin\omega'\,d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\,\mathrm{F}(h),$$

ou

$$h^2 = 1 - \frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2 2\alpha}.$$

Il est évident que h^2 est une fraction positive, à cause de

$$\frac{\sin^2 2\beta}{\sin^2 2\alpha} = \frac{1-c^2\sin^2\beta}{1-c^2\sin^2\alpha}.$$

On conclut donc finalement (la même relation ayant lieu entre c, α, β, que dans le numéro précédent)

$$(27)\quad \int_\alpha^\beta \frac{E(c, \omega)\, d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{1}{2\cos\alpha\sin\beta} E(c) F(k) + \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} F(h).$$

Si dans les équations (26) et (27) on fait $c = 0$, on aura

$$\alpha - \beta = \tfrac{1}{2}\pi,$$

et elles seront réduites à

$$\int_\alpha^\beta \frac{\omega\, d\omega}{\sqrt{(\sin^2\omega - \sin^2\alpha)(\sin^2\beta - \sin^2\omega)}} = \frac{\pi}{4\cos\alpha\sin\beta} F(k),$$

qui n'est qu'un cas particulier de l'équation (3), parce que

$$F(k, \beta) = \tfrac{1}{2} F(k),$$

lorsque les angles α et β sont complémentaires.

NOTE SUR L'ATTRACTION;

PAR M. C. BRIOT.

Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

---

1. On sait que les composantes de l'attraction d'un corps sur un point extérieur sont les dérivées d'une fonction $F(x, y, z)$ assujettie à satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2} = 0. \tag{1}$$

Les surfaces représentées par l'équation

$$a = F(x, y, z) \tag{2}$$

(a désignant un paramètre arbitraire) s'appellent *surfaces de niveau*. Concevons deux systèmes de surfaces,

$$b = f(x, y, z), \quad c = \varphi(x, y, z) \tag{3}$$

(b et c étant deux nouveaux paramètres arbitraires), *orthogonales* aux surfaces de niveau. Il existe une infinité de systèmes de cette nature. En chaque point de l'espace passent trois axes curvilignes, intersections des trois surfaces qui passent en ce point; je nomme *axe des a* l'intersection des surfaces b et c, etc. L'axe des a est perpendiculaire sur les axes des b et des c, mais ceux-ci font entre eux un angle variable δ. Je transforme l'équation (1) dans ce nouveau système de coordonnées a, b, c.

Posons

$$A^2 = \left(\frac{da}{dx}\right)^2 + \left(\frac{da}{dy}\right)^2 + \left(\frac{da}{dz}\right)^2,$$

$$B^2 = \left(\frac{db}{dx}\right)^2 + \left(\frac{db}{dy}\right)^2 + \left(\frac{db}{dz}\right)^2,$$

$$C^2 = \left(\frac{dc}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dz}\right)^2.$$

on a

$$\frac{da}{dx}\frac{db}{dx}+\frac{da}{dy}\frac{db}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{db}{dz}=0,$$

$$\frac{da}{dx}\frac{dc}{dx}+\frac{da}{dy}\frac{dc}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{dc}{dz}=0,$$

$$\frac{db}{dx}\frac{dc}{dx}+\frac{db}{dy}\frac{dc}{dy}+\frac{db}{dz}\frac{dc}{dz}=\mathrm{BC}\cos\theta.$$

équations qui peuvent s'écrire

$$\frac{da}{dx}=\mathrm{G}\left(\frac{db}{dy}\frac{dc}{dz}-\frac{db}{dz}\frac{dc}{dy}\right),$$

$$\frac{da}{dy}=\mathrm{G}\left(\frac{db}{dz}\frac{dc}{dx}-\frac{db}{dx}\frac{dc}{dz}\right),$$

$$\frac{da}{dz}=\mathrm{G}\left(\frac{db}{dx}\frac{dc}{dy}-\frac{db}{dy}\frac{dc}{dx}\right),$$

$$\mathrm{G}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{BC}\sin\theta}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\frac{d^2a}{dx^2}+\frac{d^2a}{dy^2}+\frac{d^2a}{dz^2}&=\frac{d\mathrm{G}}{dx}\left(\frac{db}{dy}\frac{dc}{dz}-\frac{db}{dy}\frac{dc}{dz}\right)+\frac{d\mathrm{G}}{dy}\left(\frac{db}{dz}\frac{dc}{dx}-\frac{db}{dx}\frac{dc}{dz}\right)\\&\quad+\frac{d\mathrm{G}}{dz}\left(\frac{db}{dx}\frac{dc}{dy}-\frac{db}{dy}\frac{dc}{dx}\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{G}}\left(\frac{d\mathrm{G}}{dx}\frac{da}{dx}+\frac{d\mathrm{G}}{dy}\frac{da}{dy}+\frac{d\mathrm{G}}{dz}\frac{da}{dz}\right)\\&=\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{da}\left[\left(\frac{da}{dx}\right)^2+\left(\frac{da}{dy}\right)^2+\left(\frac{da}{dz}\right)^2\right]\\&\quad+\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{db}\left(\frac{da}{dx}\frac{db}{dx}+\frac{da}{dy}\frac{db}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{db}{dz}\right)\\&\quad+\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{dc}\left(\frac{da}{dx}\frac{dc}{dx}+\frac{da}{dy}\frac{dc}{dy}+\frac{da}{dz}\frac{dc}{dz}\right).\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d^2a}{dx^2}+\frac{d^2a}{dy^2}+\frac{d^2a}{dz^2}=\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{da}.$$

L'équation (1) prend ainsi, dans le nouveau système de coordonnées, la forme simple

$$\frac{d\mathrm{G}}{da}=0.$$

2. Cherchons la signification géométrique de cette équation. Les axes des b et des c partagent les surfaces de niveau en petits parallélogrammes. Si nous faisons varier le paramètre b, il en résulte normalement à la surface b un déplacement $\frac{1}{B}\,db$, et suivant l'axe des b un déplacement $d\beta = \frac{1}{B \sin \vartheta}\,db$. De même, si nous faisons varier le paramètre c, il en résulte, sur l'axe des c, un déplacement $d\gamma = \frac{1}{C \sin \vartheta}\,dc$. L'élément d'une surface de niveau a donc pour expression

$$d\omega = d\beta . d\gamma . \sin \vartheta = \frac{1}{BC \sin \vartheta}\,db\,dc.$$

L'attraction du corps sur un point est représentée par la valeur particulière de A en ce point. L'attraction du corps sur l'élément de la surface de niveau sera donc

$$A\,d\omega = \frac{A}{BC \sin \vartheta}\,db\,dc = G\,db\,dc.$$

L'équation (4) signifie donc que l'*attraction du corps sur les éléments des surfaces de niveau qui correspondent aux mêmes valeurs des paramètres b et c et aux mêmes accroissements db et dc de ces paramètres, c'est-à-dire les éléments compris dans un même canal orthogonal, est constante.* Elle fournit ainsi une démonstration nouvelle d'un théorème, du reste bien connu, mais très-important dans la théorie de l'attraction.

SUR L'INTERPOLATION;

PAR M. E. BRASSINNE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Toulouse

1°. Les principales formules d'interpolation données par les géomètres peuvent se déduire assez simplement d'une formule générale qui les comprend toutes comme cas particuliers.

Supposons qu'une fonction de la variable x, que nous désignerons par u, devienne, pour des valeurs particulières $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ de la variable, successivement égale à $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$. Nous pourrons représenter la fonction u par la formule

$$(1)\quad u = \frac{A_0 u_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m) + A_1 u_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m) + \ldots + A_m u_m(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})}{A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m) + A_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m) + \ldots + A_m(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})};$$

$A_0, A_1, \ldots, A_m$ peuvent être des fonctions arbitraires de x, ou des quantités numériques quelconques. Les facteurs binômes qui multiplient, au numérateur ou au dénominateur, une fonction quelconque A_p, sont au nombre de m, et ils sont formés en retranchant de la variable x chacune de ses valeurs particulières, à l'exception de x_p. De cette forme générale nous allons conclure, en assignant des valeurs particulières aux indéterminées $A_0, A_1, \ldots, A_m$, les formules les plus connues.

2°. Si nous voulons que la formule d'interpolation soit un polynôme entier en x du degré m, il suffira de déterminer $A_0, A_1, \ldots, A_m$, regardés comme des quantités numériques, de telle sorte que la variable disparaisse au dénominateur de la formule générale; or, ce dénominateur est un polynôme du degré m; s'il prend une valeur déterminée pour les $(m+1)$ valeurs particulières de x, il faudra qu'il soit nécessairement constant, sans quoi, retranchant du dénominateur cette valeur déterminée, on obtiendrait une équation algébrique du degré m qui aurait $m+1$ racines différentes, ce qui est absurde. Or, en désignant par

$D_0, D_1, D_2, \ldots, D_m$ ce que deviennent au dénominateur les produits binômes qui multiplient $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ quand on fait successivement

$$x = x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_m,$$

et représentant par C la valeur déterminée du dénominateur pour ces diverses hypothèses, on devra avoir

$$C = A_0 D_0, \quad C = A_1 D_1, \quad C = A_2 D_2, \ldots, \quad C = A_m D_m,$$

égalités auxquelles on peut satisfaire en posant

$$A_0 = D_1 D_2 \ldots D_m, \quad A_1 = D_0 D_2 \ldots D_m, \ldots.$$

Le dénominateur de la formule (1) devient alors égal à la quantité constante $D_0 D_1 D_2 \ldots D_m$, et, si l'on remplace, au numérateur, $A_0, A_1, \ldots, A_m$ par leurs valeurs, on obtiendra la formule d'interpolation de Lagrange :

$$(2) \quad u = \frac{u_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} + \frac{u_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_1} + \ldots.$$

Si, dans cette formule, on suppose

$$u_0 = u_1 = u_2 = \ldots = u_m,$$

u_0 sera facteur commun au second membre, et il multipliera une expression de la forme

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_m)} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)} + \ldots;$$

les numérateurs sont les produits m à m des $m+1$ binômes; chaque numérateur est divisé par la quantité numérique qui exprime ce que devient ce numérateur lorsque la variable x est changée en cette lettre affectée de l'indice qui manque aux secondes lettres des binômes : or, il est visible que cette expression algébrique du degré m se réduit à l'unité pour les $m+1$ valeurs de x égales à $x_0, x_1, \ldots, x_m$; elle est donc constante et égale à l'unité. Cette remarque, qui était bien connue, nous sera utile dans ce qui suit.

3°. Si u doit être exprimé par une fraction dont le numérateur soit constant, et le dénominateur une fonction de x du degré m, nous déterminerons $A_0, A_1, \ldots, A_m$ par la condition que le numérateur ait tou-

jours la même valeur déterminée C pour $x = x_0 = x_1 = \ldots = x_m$. Il faudra pour cela satisfaire aux égalités

$$A_0 u_0 D_0 = C, \quad A_1 u_1 D_1 = C, \ldots, \quad A_m u_m D_m = C,$$

ce qui reviendra à faire

$$A_0 = u_1 D_1 u_2 D_2 \ldots u_m D_m, \quad A_1 = u_0 D_0 u_2 D_2 \ldots u_m D_m;$$

par suite, la formule générale (1) deviendra

$$(3) \quad u = \frac{1}{\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} \cdot \frac{1}{u_0} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_1} \cdot \frac{1}{u_1} + \ldots}.$$

4°. Supposons que u doive être exprimé par une fraction dont le numérateur soit du degré n, et le dénominateur du degré $(p-1)$, en supposant

$$m = n + p - 1.$$

Pour arriver à cette forme, posons, dans la formule générale (1),

$$A_0 = \frac{B_0}{D_0}, \quad A_1 = \frac{B_1}{D_1}, \ldots;$$

$B_0, B_1, B_2, \ldots$ étant de nouvelles indéterminées; la formule (1) deviendra

$$(4) \quad u = \frac{B_0 u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} + B_1 u_1 \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_m)}{D_1} + \ldots}{B_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} + B_1 \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_m)}{D_1} + \ldots}.$$

Dans cette formule (4) supposons B_0 égal à la somme des produits $(p-1)$ à $(p-1)$ qu'on peut faire avec les m lettres $u_1, u_2, \ldots, u_m$, chacun de ces produits étant multiplié par un nombre indéterminé; que B_1 soit de même égal à la somme des produits $(p-1)$ à $(p-1)$ de $u_0, u_2, \ldots, u_m$, etc. Cherchons dans le numérateur de la formule (4) ce qui multipliera un produit quelconque de p lettres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$. Ce produit ne se trouvera que dans les p premiers termes du numérateur de la formule (4), et il sera multiplié par une expression de la forme

$$\alpha \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_0} + \beta \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{D_1} + \ldots.$$

Il est clair que, dans cette somme de p termes, le produit

$$(x - x_p)(x - x_{p+1}) \ldots (x - x_m)$$

sera facteur commun. Mais ce produit est divisé, dans le premier terme, par les facteurs binômes de D_0, $(x_0 - x_p)(x_0 - x_{p+1}) \ldots (x_0 - x_m)$, dont nous nommerons le produit d_0 ; dans le second terme, par des facteurs de D_1, $(x_1 - x_p) \ldots (x_1 - x_m)$, dont nous appellerons le produit d_1, etc. Cela posé, nous ferons

$$\alpha = \frac{1}{d_0 . d_1 \ldots d_{p-1}}, \quad \beta = \frac{1}{d_0 . d_1 \ldots d_{p-1}}, \ldots$$

Nous aurons alors, en isolant le facteur commun dans la somme précédente, et observant que ce facteur est multiplié, d'après la remarque du 2°, par une somme égale à l'unité, le terme général du numérateur ainsi exprimé

$$\frac{u_0}{d} \cdot \frac{u_1}{d_1} \cdot \frac{u_2}{d} \cdots \frac{u_{p-1}}{d_{p-1}} (x - x_p)(x - x_{p+1}) \ldots (x - x_m),$$

dont la loi est très-aisée : un produit de p lettres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$, est multiplié par un produit de n facteurs binômes, dont le premier terme est x, et le second, ce même x affecté des indices qui ne se trouvent pas dans le produit $u_0 u_1 \ldots u_{p-1}$. Si l'on change successivement la variable x en x_0 $x_1 \ldots$ x_{p-1}, on aura les produits désignés par $d_0, d_1, \ldots, d_{p-1}$, et le terme général sera divisé par $d_0 . d_1 \ldots d_{p-1}$.

Le dénominateur n'offre pas plus de difficulté, ses termes ne contiendront que $p - 1$ facteurs en u. Cherchons l'expression de celui qui contient le produit $u_0 u_1 u_2 \ldots u_{p-2}$. Ce terme monôme provient des valeurs de B_{p-1}, $B_p, \ldots$, B_m développées. Or, le monôme qui se trouve dans B_{p-1} est multiplié par u_{p-1}; il donne au dénominateur, d'après la loi établie pour le numérateur, un terme

$$\frac{u_0 . u_1 . u_2 \ldots u_{p-2}}{(x_0 - x_p) \ldots (x_1 - x_m) \times (x_1 - x_p) \ldots (x_1 - x_m) \times \ldots \times (x_{p-2} - x_p) \ldots (x_{p-2} - x_m)}$$
$$\times \left[\frac{(x - x_p)(x - x_1) \ldots (x - x_m)}{(x_{p-1} - x_p) \ldots (x_{p-1} - x_m)} \right].$$

Le coefficient B_p donnera un terme pareil ; seulement, aux dénominateurs en dehors de la parenthèse, les x_p seront remplacés par x_{p-1},

et, entre parenthèses, les x_{p-1} seront remplacés par x_p. Le terme provenant de B_{p+1} dérivera du précédent; seulement l'indice $p+1$, en dehors de la parenthèse, sera remplacé par p, et l'indice p par $p+1$ en dedans, etc. Cela posé, si l'on isole dans les termes provenant de B_{p-1}, B_p, B_m les facteurs communs en x, dont on changera les signes ainsi que ceux des binômes qui leur correspondent aux dénominateurs, on aura, pour le terme général du dénominateur,

$$\frac{u_0 . u_1 . u_2 \ldots u_{p-2} (x_0 - x)(x_1 - x) \ldots (x_{p-2} - x)}{(x_0 - x_{p-1}) \ldots (x_0 - x_m) \times (x_1 - x_{p-1}) \ldots (x_1 - x_m) \ldots \times (x_{p-2} - x_{p-1})(x_{p-2} - x_p) \ldots (x_{p-2} - x_m)},$$

qui multiplie une expression égale à l'unité. La loi de ce terme est aisée. Le groupe $u_0 u_1 \ldots u_{p-2}$ est multiplié par $p-1$ facteurs binômes, dont les premières lettres sont x affecté successivement des indices de u, et les seconds termes la variable x. Ce produit total est divisé par $p-1$ groupes, dans chacun desquels la première lettre est x affecté de l'un des indices de u, et la seconde lettre, x, affecté successivement des indices qui n'entrent pas dans le produit $u_0 u_1 u_2 \ldots u_{p-2}$.

La méthode précédente fournit une démonstration de la formule d'interpolation que M. Cauchy a donnée dans son *Cours d'Analyse*, page 528.

5°. On peut enfin déduire, de la formule d'interpolation de Lagrange, deux formules très-souvent employées. Reprenons la formule (2) de Lagrange, que nous écrirons de cette manière

$$u = u_0 \frac{N_0}{D_0} + u_1 \frac{N_1}{D_1} + u_2 \frac{N_2}{D_2} + \ldots.$$

Posons

$$u_1 = u_0 + A, \quad u_2 = u_0 + B, \quad u_3 = u_0 + C, \quad u_4 = u_0 + D, \ldots,$$

nous aurons, en isolant le facteur commun u_0, et d'après la remarque du 2°,

$$u = u_0 + \frac{AN_1}{D_1} + \frac{BN_2}{D_2} + \frac{CN_3}{D_3} + \frac{DN_4}{D_4} + \ldots.$$

Or, tous les termes après u_0 ont pour facteur commun $x - x_0$, et ce binôme est divisé, dans le second terme, par $x_1 - x_0$, dans le troisième par $x_2 - x_0$, dans le quatrième par $x_3 - x_0$, etc. Isolant ce facteur commun, et posant

$$A = \delta u_0 (x_1 - x_0), \quad B = \delta u_0 (x_2 - x_0) + B', \quad C = \delta u_0 (x_3 - x_0) + C', \ldots,$$

il résultera, en isolant $\delta u_0(x - x_0)$, une nouvelle expression de u de cette forme

$$u = u_0 + (x - x_0)\delta u_0 + \frac{B'N_2}{D_2} + \frac{C'N_3}{D_3} + \frac{D'N_4}{D_4} + \ldots.$$

Tous les termes après les deux premiers contiennent, en facteur commun, $(x - x_0)(x - x_1)$, et ce produit est divisé, dans le troisième terme, par deux facteurs de D_2, savoir $(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$, dans le suivant par $(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)$,.... Posant donc

$$B' = \delta^2 u_0 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$
$$C' = \delta^2 u_0 (x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + C'',$$
$$D' = \delta^2 u_0 (x_4 - x_0)(x_4 - x_1) + D'',\ldots,$$

nous trouverons, en isolant $\delta^2 u_0$, une nouvelle expression de la forme

$$(5) \quad u = u_0 + (x - x_0)\delta u_0 + (x - x_0)(x - x_1)\delta^2 u_0 + \frac{C''N_3}{D_3} + \ldots,$$

dont la loi est évidente, et qui revient à la formule de la *Mécanique céleste* tome Ier, page 200). Il est clair que, si l'on avait classé les indices dans un autre ordre, par exemple dans l'ordre 1, 2, 3,..., m, 0, on aurait obtenu une formule pareille à la formule (5), savoir,

$$(6) \qquad u = u_1 + (x - x_1)\delta u_1 + (x - x_1)(x - x_2)\delta^2 u_1 + \ldots.$$

La formule (5), n'étant qu'une nouvelle forme de la formule de Lagrange, donnera les valeurs de $u_0, u_1, u_2,\ldots, u_m$ en y posant

$$x = x_0 = x_1 = \ldots = x_m.$$

Cette observation nous donnera une loi de formation aisée pour les $\delta u_0, \delta^2 u_0, \delta^3 u_0,\ldots$. Posons, en effet, $x = x_1$ dans la formule (5), nous trouverons

$$u_1 = u_0 + (x_1 - x_0)\delta u_0,$$

d'où

$$\delta u_0 = \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0};$$

par suite, et d'après l'ordre successif arbitraire des indices,

$$\delta u_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}, \qquad \delta u_2 = \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2}, \ldots.$$

Pour déterminer $\delta^2 u_0$, $\delta^2 u_1, \ldots$, posons, comme conséquences des formules (5), (6),

$$u_2 = u_0 + (x_1 - x_0)\,\delta u_0 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\,\delta^2 u_0,$$
$$u_2 = u_1 + (x_2 - x_1)\,\delta u_1;$$

soustrayant ces deux dernières et remplaçant $u_1 - u_0$ par $\delta u_0 (x_1 - x_0)$, on trouvera

$$\delta^2 u_0 = \frac{\delta u_1 - \delta u_0}{x_2 - x_0},$$

et, par suite,

$$\delta^2 u_1 = \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{x_3 - x_1}, \qquad \delta^2 u_2 = \frac{\delta u_3 - \delta u_2}{x_4 - x_2}.$$

Pour trouver $\delta^3 u_0$, on poserait $x = x_3$ dans les formules (5), (6), on soustrairait les deux valeurs de u_3, et l'on éliminerait u_1, δu_1 en fonction de u_0, δu_0, ce qui donnerait

$$\delta^3 u_0 = \frac{\delta^2 u_1 - \delta^2 u_0}{x - x_0}, \ldots.$$

Si, dans la formule (5), on suppose

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h, \ldots,$$

on aura, en employant les différences finies dont la caractéristique est Δ,

$$\delta u_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} = \frac{\Delta u_0}{h}, \quad \delta^2 u_0 = \frac{\Delta^2 u_0}{2.h^2}, \quad \delta^3 u_0 = \frac{\Delta^3 u_0}{2.3.h}, \ldots;$$

ces valeurs, substituées dans la formule (5), donneront

$$u = u_0 + \frac{x}{h}\,\Delta u_0 + \frac{x(x-h)}{1.2.h^2}\,\Delta^2 u_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{1.2.3.h^3}\,\Delta^3 u_0 + \ldots$$

formule ordinairement employée pour l'interpolation.

Sur les trajectoires qui coupent, sous un angle constant, les courbes méridiennes des surfaces de révolution;

PAR M. L'ABBÉ AOUST.
Professeur au Collége Stanislas.

I.

Soit r la distance d'un point quelconque de la surface à l'axe de révolution que nous prenons pour axe des z; on aura

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}:$$

et l'équation de la surface sera

$$z = \psi(r).$$

Soit α l'angle sous lequel la courbe cherchée doit couper les courbes méridiennes; les cosinus des angles qu'une tangente quelconque en l'un de ses points (x, y, z) fait avec les trois axes sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et les cosinus des angles que la tangente à la courbe méridienne au même point fait avec les mêmes axes sont $\frac{dx}{d\sigma}\frac{x}{r}$, $\frac{dy}{d\sigma}\frac{y}{r}$, $\frac{dz}{d\sigma}$, $d\sigma$ étant l'arc différentiel de cette courbe. D'après cela, l'équation qui exprimera que ces deux tangentes font un angle constant sera

$$\cos\alpha = \frac{dr}{d\sigma}\left(\frac{xdx + ydy}{ds}\right) + \frac{dz^2}{d\sigma\, ds}.$$

Cette équation se simplifie, car

$$xdx + ydy = rdr \quad \text{et} \quad dr^2 + dz^2 = d\sigma^2.$$

En ayant égard à ces relations, l'on obtient

$$d\sigma = \cos\alpha . ds,$$

equation évidente par elle-meme, et que l'on aurait pu poser immé-

diatement. En intégrant, on trouve

$$\sigma = s \cos \alpha,$$

la constante étant déterminée par la condition que l'origine des arcs de la trajectoire corresponde à l'origine des arcs de la courbe méridienne.

Si nous rapportons un point quelconque de la trajectoire à des coordonnées curvilignes tracées sur la surface, dont l'une serait l'arc de la courbe méridienne, et l'autre serait l'arc du cercle parallèle passant par ce point, coordonnées que nous appellerons σ et ξ, l'équation (1) deviendra, à cause de la relation $ds^2 = d\sigma^2 + d\xi^2$,

$$(2) \qquad d\xi = \operatorname{tang} \alpha . d\sigma,$$

qui, par l'intégration, devient

$$\xi = \operatorname{tang} \alpha . \sigma,$$

l'origine des coordonnées curvilignes se trouvant au point d'intersection de la trajectoire avec le méridien. Ainsi l'équation de la trajectoire en coordonnées curvilignes orthogonales a la même forme que l'équation de la droite en coordonnées rectilignes. Cette trajectoire joue sur la surface de révolution le même rôle que la droite sur le plan.

Si l'on cherche, dans le même système de coordonnées, l'aire interceptée entre un méridien fixe, la trajectoire et le parallèle, on a, pour différentielle de l'aire,

$$du = \xi d\sigma,$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad du = \operatorname{tang} \alpha . \sigma d\sigma;$$

et, en intégrant, l'on obtient

$$u = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \alpha . \sigma^2.$$

II.

Des équations que nous venons de trouver,

$$(4) \qquad \sigma = \operatorname{tang} \alpha . s, \quad u = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \alpha . \sigma^2,$$

on déduit les conséquences suivantes :

1°. Si l'on construit sur un plan un triangle rectangle tel que l'un

des côtés de l'angle droit soit égal à la longueur de l'arc du méridien σ. l'un des angles aigus soit l'angle donné α, l'hypoténuse de ce triangle donnera l'hypoténuse du triangle curviligne; et son aire donnera aussi l'aire du même triangle curviligne tracé sur la surface de révolution.

2°. Toutes les fois que la courbe méridienne sera rectifiable, la trajectoire le sera aussi; et l'expression de l'aire du segment de surface intercepté par les trois courbes sera connue.

3°. Les équations (4) subsisteront toujours, quelle que soit la position de l'origine des coordonnées curvilignes, pourvu que la trajectoire passe par cette origine. Donc, quelle que soit la position du triangle curviligne tracé sur une longueur constante d'un arc de méridien, sous l'angle α, le côté formé par l'arc de trajectoire sera constant, ainsi que son aire; on pourra donc tracer des aires équivalentes sur une même surface de révolution.

4°. Les mêmes équations étant indépendantes de la nature de la surface de révolution, quelle que soit la surface de révolution sur laquelle sera tracé le triangle curviligne, si l'un des côtés formé par l'arc de méridien est constant ainsi que l'angle α, le côté formé par l'arc de trajectoire sera constant, et son aire sera aussi constante. On pourra donc tracer des aires équivalentes sur des surfaces de révolution différentes.

Il est aussi évident que toutes les questions relatives aux aires des triangles rectilignes tracés sur un plan sont par cela même résolues pour les triangles curvilignes que nous avons définis, et que l'on aurait tracés sur une surface de révolution.

Il est aisé de voir que la trajectoire coupe les parallèles sous un angle constant, complément de l'angle α, et que les constructions que nous avons faites sur l'arc de méridien auraient pu être faites sur l'arc du parallèle. Tous les triangles curvilignes construits sur une même surface, ou sur des surfaces différentes, ainsi que les triangles rectilignes construits sur un plan, jouiront de cette propriété d'avoir tous leurs éléments égaux, c'est-à-dire trois côtés de même longueur chacun à chacun, mais de différentes courbures, trois angles égaux et même aire, pourvu que la longueur de l'arc de méridien qui forme le côté de l'angle droit soit constante et que l'angle α soit le même.

III.

Il est facile d'obtenir l'équation différentielle de la projection de la trajectoire sur le plan des xy. En effet, appelons θ l'angle que r, projection du rayon vecteur sur le plan des xy, fait avec l'axe des x, on a

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2 + dz^2} \quad \text{et} \quad d\sigma = \sqrt{dz^2 + dr^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), en ayant égard à l'équation de la surface $z = \psi(r)$, on trouve, réductions faites,

$$(5) \qquad d\theta = \operatorname{tang} \alpha \cdot \frac{dr}{r} \sqrt{1 + \overline{\psi'(r)}^2},$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

La différentielle de l'arc de la trajectoire est donnée par la formule

$$(6) \qquad ds = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot dr \sqrt{1 + \overline{\psi'(r)}^2}.$$

qui montre que la trajectoire sera rectifiable lorsque la courbe méridienne le sera; ce que nous avions déjà reconnu.

Enfin, la différentielle de l'aire du segment triangulaire est

$$du = \sin \alpha \cos \alpha . s ds.$$

On connaîtra donc l'aire du segment triangulaire lorsque la courbe méridienne sera rectifiable.

Il est inutile de remarquer que l'équation différentielle (5) est aussi propre à résoudre la question inverse de la question proposée.

Ainsi, supposons que l'on demande quelle est la surface de révolution telle, que la trajectoire qui coupe les courbes méridiennes sous un angle constant ait pour projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution une courbe donnée. Soit $\theta = \varphi(r)$ l'équation donnée de cette projection, en coordonnées polaires. L'équation de la courbe méridienne inconnue, et par conséquent de la surface de révolution, sera donnée par l'équation différentielle

$$(7) \qquad \operatorname{tang} \alpha . dz = dr \sqrt{r^2 \overline{\varphi'(r)}^2 - \operatorname{tang}^2 \alpha},$$

qui se déduit facilement de l'équation (5) et où les variables sont encore séparées.

IV.

Comme application des formules précédentes, cherchons :

1°. Quelle est la courbe qui coupe, sous un angle constant, les génératrices d'un cône droit. Si 2β représente l'angle du cône, son équation sera

$$r = \operatorname{tang} \beta . z.$$

L'équation (5) devient

$$d\theta = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{dr}{r},$$

dont l'intégrale est la spirale logarithmique

$$r = ce^{\frac{\operatorname{tang} \beta}{\sin \alpha} \theta},$$

c étant la constante introduite par l'intégration. La longueur de l'arc est donnée par la formule

$$s = \frac{r}{\cos \alpha \sin \beta},$$

et l'aire du segment triangulaire est donnée par

$$u = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\sin^2 \beta} r^2.$$

2°. Cherchons quelle est la courbe qui coupe, sous un angle constant, les méridiens d'une sphère. L'équation d'un méridien quelconque étant

$$z^2 + r^2 = a^2,$$

on a l'équation

$$d\theta = \operatorname{tang} \alpha . \frac{dr}{\frac{r}{a}\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}.$$

dont l'intégrale est

$$r^2 = ce^{\frac{-\theta}{\operatorname{tang} \alpha}} \left(ce^{\frac{-\theta}{\operatorname{tang} \alpha}} - 2a \right).$$

3°. Proposons-nous de trouver quelle doit être la surface de révolution pour que la projection sur le plan des xy de la courbe qui coupe les méridiens sous un angle constant soit la spirale $r = a\theta^2$; on doit, dans ce cas, faire usage de la formule (7). On trouve

$$\tang \alpha\, dz = dr \sqrt{\frac{r}{4a} - \tang^2 \alpha};$$

en intégrant, on obtient la développée de la parabole

$$\frac{\tang^2 \alpha}{9a^2} z^2 = \left(\frac{r}{a} - 4 \tang^2 \alpha\right).$$

V.

La courbe donnée par l'équation (5) et l'équation d'une surface de révolution est aussi celle qu'affecte un fil placé sur une surface de révolution, et dont tous les éléments sont attirés par une force agissant suivant la distance de cet élément à l'axe, et à raison inverse du carré de cette distance.

Généralement, quand on cherche quelle est la force sous l'action de laquelle un fil flexible, non élastique, affecte, sur une surface donnée, une courbe d'équilibre donnée, on trouve que l'expression de cette force dépend de sa direction, du genre et de l'espece de la surface, et de la nature de la courbe tracée sur cette surface; mais, si la surface est de révolution, si la force est dirigée vers l'axe, si enfin la courbe d'équilibre doit couper les méridiens sous un angle constant, on trouve que la force est indépendante de l'espèce de surface de révolution, en sorte que cette force est toujours la même pour une surface de révolution quelconque.

En effet, les équations d'équilibre du fil non élastique sont, dans le cas d'une force quelconque R,

$$\mp \varepsilon ds \mathrm{R} \cos \alpha + d\left(\mathrm{T} \frac{dx}{ds}\right) - \mathrm{N} \varepsilon ds\, \psi'(r) \frac{x}{r} = 0,$$

$$\mp \varepsilon ds \mathrm{R} \cos \beta + d\left(\mathrm{T} \frac{dy}{ds}\right) + \mathrm{N} \varepsilon ds\, \psi'(r) \frac{y}{r} = 0,$$

$$\mp \varepsilon ds \mathrm{R} \cos \gamma + d\left(\mathrm{T} \frac{dz}{ds}\right) + \mathrm{N} \varepsilon ds = 0;$$

$z = \psi(r)$ est l'équation de la surface, N sa résistance, T la tension du fil, ε le produit de l'épaisseur du fil par sa densité, α, β, γ les angles de

la force R avec les trois axes. Dans le cas particulier où la force est dirigée vers l'axe de la figure, on déduit facilement

$$(8) \qquad dT = \pm \varepsilon R dr, \qquad T(ydx - xdy) = kds,$$

k étant une constante introduite par l'intégration. Si l'on passe aux coordonnées polaires, la dernière équation devient

$$Tr^2 d\theta = k\sqrt{dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2}.$$

Mais si l'on veut que le fil coupe sous un angle constant tous les méridiens, il faut porter, dans cette équation, la valeur de dz, tirée de l'équation de la surface, et la valeur de $d\theta$, tirée de l'équation (5). On obtient ainsi, pour l'expression de la tension,

$$T = \frac{k}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{r},$$

et, en portant cette valeur dans la première équation (8), on trouve

$$R = \pm \frac{k}{\sin\alpha} \frac{1}{r^2}.$$

La tension est donc indépendante de l'espèce de surface de révolution, ainsi que la force, et, de plus, la force est inverse du carré de la distance du point à l'axe.

VI.

C'est encore la même courbe que l'on obtient, lorsqu'on cherche la trajectoire décrite sur une surface de révolution par un point matériel, soumis à l'action d'une force dirigée suivant la distance du point à l'axe, et inverse du cube de cette distance, quelle que soit la surface de révolution.

En effet, les équations du mouvement du point matériel sur la surface de révolution sont, dans le cas d'une force dirigée vers l'axe, en admettant la notation précédente,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r} + N\psi'(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r} + N\psi'(r)\frac{y}{r},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = N.$$

L'équation des forces vives donne

$$v^2 = -2\int R dr,$$

et le principe des aires, sur le plan des xy, fournit la relation

$$r^2 dt = c dt.$$

Si l'on élimine dt entre ces deux équations, on peut déterminer R de manière que la trajectoire soit la courbe qui coupe tous les méridiens sous un angle constant; on trouve alors

$$R = \pm \frac{2c^2}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{1}{r},$$

expression indépendante de l'espèce de surface de révolution.

VII.

Il est encore un autre problème de Mécanique qui conduit à la même courbe, c'est-à-dire à la trajectoire qui coupe tous les méridiens d'une surface de révolution sous un angle constant, ou du moins une courbe qui en approche indéfiniment.

Cherchons la trajectoire décrite par une petite sphère, enfermée et pouvant glisser sans frottement dans un tube curviligne infiniment mince, lequel tourne autour d'un axe d'un mouvement uniforme, abstraction faite de la pesanteur.

Comme la pression de la petite sphère sur le tube est normale à ce tube, il suffira d'exprimer que l'angle que fait cette pression, en un point quelconque du tube, avec la tangente au tube passant par ce point, est droit; or, les cosinus des angles de la pression avec les trois axes sont proportionnels aux quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; et, si l'on représente par $z = \psi(r)$ l'équation du tube, les cosinus de la tangente, en un point quelconque, avec les mêmes axes, sont $\psi'(r)\frac{x}{r}$, $\psi'(r)\frac{y}{r}$, $\frac{dz}{dr}$. On aura donc

$$\frac{dz}{dr} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{x d^2x + y d^2y}{r dt^2} = 0.$$

ou bien

$$dz \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + dr\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dr^2}dr = 0;$$

et, comme le mouvement de rotation est uniforme,

$$\frac{d\theta}{dt} = a,$$

a étant une constante. Introduisant cette condition dans l'équation précédente, et intégrant, on trouve

$$\frac{dr^2 + dz^2}{dt^2} = a^2(l^2 + r^2),$$

a^2l^2 étant le carré de la vitesse pour $r = 0$; on en déduit

$$d\theta = dr\frac{\sqrt{1 + \psi'(r)^2}}{\sqrt{l^2 + r^2}};$$

l peut être pris aussi petit qu'on voudra, de sorte que r pourra devenir une quantité très-grande par rapport à l. Donc, à mesure que r augmente, $\frac{d\theta}{dr}$ converge vers $\frac{\sqrt{1 + \psi'(r)^2}}{r}$, qui représente la courbe qui coupe les méridiens sous un angle de 45 degrés. Lorsque la vitesse initiale de la sphère est très-petite, sa position initiale dans le tube étant sur l'axe de révolution, ou bien, si elle ne se trouve pas sur l'axe de révolution, son éloignement étant très-petit, la constante l sera très-petite, et si le rayon r devient de plus en plus grand, la trajectoire tendra de plus en plus à couper les méridiens sous un angle constant.

NOTE

SUR LES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE FORCES

DIRIGÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE;

PAR M. R. LOBATTO,

Professeur d'analyse et de mecanique à l'Academie royale de Delft.

---

1. En m'occupant d'un probleme de géométrie, j'ai eu lieu de remarquer qu'il existe une relation assez simple entre la longueur de la droite qui mesure la distance de l'origine d'un systeme de trois axes rectangulaires à une droite donnée dans l'espace, et les distances du même point aux projections de cette droite sur les trois plans coordonnés. Il est probable que la relation dont il s'agit se sera déjà présentée à d'autres géomètres. Cependant, comme je ne l'ai vue rapportée dans aucun Traité de Géométrie analytique, j'ai pensé qu'il pourrait être utile de la faire connaître ici, d'autant plus qu'elle offre un moyen de démontrer bien facilement les conditions d'équilibre d'un système de forces agissant d'une manière quelconque dans l'espace, ce qui forme le principal objet de la présente Note.

2. Désignons par α, β, γ les angles formés par une droite donnée avec ses trois projections sur les plans des xy, xz et yz; et par δ, δ_1, δ_2 les distances de l'origine des coordonnées à ces projections; soit, en outre, Δ la distance de ce point à la droite elle-meme. On aura, entre les quatre quantités Δ, δ, δ_1, δ_2, la relation

$$\Delta^2 = \delta^2 \cos^2 \alpha + \delta_1^2 \cos^2 \beta + \delta_2^2 \cos^2 \gamma.$$

que l'on peut vérifier de la manière suivante.

Soient α', β', γ' les angles compris entre la droite donnée et les axes des x, y, z. Prenons sur cette droite un point quelconque (x', y', z').

La droite qui joindra ce point à l'origine forme avec la première un angle μ dont le cosinus aura pour expression

$$\frac{x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

d'où l'on tire, de suite,

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.\sin\mu \\ &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 - (x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma')^2},\end{aligned}$$

valeur qui pourra s'écrire encore sous cette forme plus symétrique :

$$\Delta^2 = (x'\cos\beta' - y'\cos\alpha')^2 + (z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma')^2 + (y'\cos\gamma' - z'\cos\beta')^2.$$

Les trois projections de la droite donnée auront pour équations

$$y - y' = \frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}(x - x'),$$

$$z - z' = \frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}(x - x'),$$

$$z - z' = \frac{\cos\gamma'}{\cos\beta'}(y - y').$$

La perpendiculaire menée de l'origine sur la première de ces projections s'exprimera, d'après une formule connue, par

$$\delta = \pm \frac{y' - x'\dfrac{\cos\beta'}{\cos\alpha'}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{\cos^2\beta'}{\cos^2\alpha'}\right)}} = \pm \frac{y'\cos\alpha' - x'\cos\beta'}{\sin\gamma'};$$

on aura de même

$$\delta_1 = \pm \frac{x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha'}{\sin\beta'}, \quad \delta_2 = \pm \frac{z'\cos\beta' - y'\cos\gamma}{\sin\alpha'}.$$

Ces valeurs conduisent immédiatement à la relation

$$\Delta^2 = \delta^2\sin^2\gamma' + \delta_1^2\sin^2\beta' + \delta_2^2\sin^2\alpha',$$

qui, à cause de

$$\sin\gamma' = \cos\alpha, \quad \sin\beta' = \cos\beta \quad \text{et} \quad \sin\alpha' = \cos\gamma,$$

se changera en

$$\Delta^2 = \delta^2 \cos^2 \alpha + \delta_1^2 \cos^2 \beta + \delta_2^2 \cos^2 \gamma,$$

ce qu'il fallait prouver.

3. Cherchons l'équation du plan passant par l'origine et la droite. Soit

$$Ax + By + Cz = 0$$

l'équation dont il s'agit. Le plan passant en même temps par le point (x', y', z'), on aura évidemment

$$Ax' + By' + Cz' = 0.$$
$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$
$$A \cos \alpha' + B \cos \beta' + C \cos \gamma' = 0.$$

Eliminant les quantités A et B entre la première et la troisieme de ces dernières équations, on obtiendra les rapports

$$\frac{B}{C} = \frac{x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha'}{y' \cos \alpha' - x' \cos \beta'},$$

$$\frac{A}{C} = \frac{z' \cos \beta' - y' \cos \gamma'}{y' \cos \gamma' - x' \cos \beta'}.$$

On pourra ainsi représenter l'équation du plan par

$$(z' \cos \beta' - y' \cos \gamma') x + (x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha') y + (y' \cos \alpha' - x' \cos \beta') z = 0.$$

ou bien par

$$\delta_2 \cos \gamma . x - \delta_1 \cos \beta . y - \delta \cos \alpha . z = 0.$$

d'ou l'on tire, pour les valeurs des angles φ, φ_1, φ_2, formés par ce plan avec ceux des xy, xz, yz,

$$\cos \varphi = \frac{\delta \cos \alpha}{\Delta}, \qquad \cos \varphi_1 = \frac{\delta \cos \beta}{\Delta}, \qquad \cos \varphi_2 = \frac{\delta_2 \cos \gamma}{\Delta}.$$

4. Passons maintenant à la démonstration des équations d'équilibre d'un système de forces quelconques. Soit P l'intensité de la force agissant au point (x, y, z), et dont la direction forme les angles a, b, c avec les trois axes coordonnés. Transportons parallèlement cette force

a l'origine en y ajoutant un couple qui aura pour moment $P\Delta$, en désignant par Δ la distance de l'origine à la direction primitive de la force P. Celle-ci donnera lieu à trois forces composantes

$$P\cos a, \quad P\cos b, \quad P\cos c.$$

Le moment $P\Delta$ du couple se décomposera également en trois moments de couples agissant dans les trois plans coordonnés, et qui auront pour valeurs

$$P\Delta\cos\varphi, \quad P\Delta\cos\varphi_1, \quad P\Delta\cos\varphi_2,$$

φ, φ_1, φ_2 exprimant les angles compris entre le plan du couple $P\Delta$ et ceux des xy, xz, yz.

Or, et d'après les relations obtenues ci-dessus (n° **3**), ces valeurs se réduisent respectivement à

$$P(y\cos a - x\cos b),$$
$$P(x\cos c - z\cos a),$$
$$P(z\cos b - y\cos c).$$

En opérant de même sur toutes les autres forces du système, il en résultera pour conditions d'équilibre

$$\Sigma P\cos a = 0, \quad \Sigma P\cos b = 0, \quad \Sigma P\cos c = 0.$$
$$\Sigma P(y\cos a - x\cos b) = 0,$$
$$\Sigma P(x\cos c - z\cos a) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos b - y\cos c) = 0.$$

Ces trois dernieres équations pouvant être mises encore sous la forme suivante.

$$\Sigma P\cos\alpha.\delta = 0, \quad \Sigma P\cos\beta.\delta_1 = 0, \quad \Sigma P\cos\gamma.\delta_2 = 0.$$

indiquent en même temps que la somme des moments pris par rapport à l'origine des projections de toutes les forces P sur chaque plan coordonné, est égale à zéro.

SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1}\,dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos\beta x . x^{m-1}\,dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin\beta x . x^{m-1}\,dx}{1+x^2};$$

PAR M. A.-F. SVANBERG.

On a la formule connue

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-ux} x^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m)}{u^m};$$

qui suppose $m > 0$. En la multipliant par $\sin(u-\beta)du$, et l'intégrant entre les limites $u = \beta$ et $u = \infty$, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1+x^2} = \Gamma(m) \int_\beta^\infty \frac{\sin(u-\beta)\,du}{u^m}$$

$$= \Gamma(m) \int_0^\infty \frac{\sin(u-\beta)\,du}{u^m} - \Gamma(m) \int_0^\beta \frac{\sin(u-\beta)\,du}{u^m}.$$

où nous prenons $m < 1$; or, dans cette hypothèse, on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin(u-\beta)\,du}{u^m} = \cos\beta \int_0^\infty \frac{\sin u . du}{u^m} - \sin\beta \int_0^\infty \frac{\cos u . du}{u^m}$$

$$= \Gamma(1-m) \cos\frac{m\pi}{2} \cos\beta - \Gamma(1-m) \sin\frac{m\pi}{2} \sin\beta$$

$$= \Gamma(1-m) \cos\left(\frac{m\pi}{2} + \beta\right).$$

et, de plus,

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi};$$

il vient donc

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1+x^2} = \frac{\pi \cos\left(\frac{m\pi}{2} + \beta\right)}{\sin m\pi} + \Gamma(m) \sin\beta \int_0^\beta \frac{\cos u\,du}{u^m}$$

$$- \Gamma(m) \cos\beta \int_0^\beta \frac{\sin u\,du}{u^m}.$$

En mettant dans cette formule $\beta\sqrt{-1}$ au lieu de β, on trouve la valeur des deux autres intégrales proposées; mais cette méthode n'étant pas à l'abri de toute objection, il conviendra mieux de les chercher directement. Considérons, pour cela, l'intégrale connue

$$\int_0^\infty \cos ux . x^{m-1} dx = \frac{\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2}}{u^m}.$$

En multipliant par $e^{-u}du$, et intégrant entre les limites $u = \beta$ et $u = \infty$, on trouve

$$e^{\beta} \int_0^\infty \frac{x^{m-1} dx (\cos \beta x - \sqrt{-1} \sin \beta x)}{1 + x} = \Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2} \int_\beta^\infty \frac{e^{-u} du}{u^m}.$$

Soit maintenant

$$\int_0^\infty \frac{\cos \beta x . x^{m-1} dx}{1 + x^2} = z,$$

nous aurons

$$-\int_0^\infty \frac{\sin \beta x . x^m dx}{1 + x^2} = \frac{dz}{d\beta}.$$

par où l'équation précédente deviendra

$$\frac{dz}{d\beta} - z = -\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2} e^{\beta} \int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m}.$$

Cette équation différentielle en β devient intégrable en la multipliant par $e^{\beta} d\beta$, et l'on obtient

$$ze^{\beta} = C - \Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2} \int_0^\beta \left(e^{2\beta} d\beta \int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} \right).$$

L'intégration *par parties* donne

$$\int_0^\beta \left(e^{2\beta} d\beta \int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} \right) = \frac{e^{2\beta} - 1}{2} \int_\infty^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} - \frac{1}{2} \int_0^\beta (e^{2\beta} - 1) \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m}$$

$$= -\frac{e^{2\beta} - 1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} - \frac{e^{2\beta} - 1}{2} \int_0^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} - \frac{1}{2} \int_0^\beta (e^{\beta} - e^{-\beta}) \frac{d\beta}{\beta^m}$$

$$= -\frac{e^{2\beta} - 1}{2} \frac{\Gamma(1 - m)}{\sin m\pi} + \frac{e^{2\beta}}{2} \int_0^\beta \frac{e^{-\beta} d\beta}{\beta^m} - \frac{1}{2} \int_0^\beta \frac{e^{\beta} d\beta}{\beta^m}.$$

et, si l'on détermine la constante C par la supposition de $\beta = 0$, ce qui donne

$$C = \frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{2}},$$

nous aurons enfin, à cause de $\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi} = \frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{2}\cos\frac{m\pi}{2}}$,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} z &= \int_0^\infty \frac{\cos\beta x \,.\, x^{m-1}dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{4\sin\frac{m\pi}{2}}(e^\beta + e^{-\beta}) + \frac{\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{2}}{2}\left(e^{-\beta}\int_0^\beta \frac{e^\beta d\beta}{\beta^m} - e^\beta\int_0^\beta \frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m}\right). \end{aligned}\right.$$

On trouve, d'une manière semblable,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sin\beta x \,.\, x^{m-1}dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{4\cos\frac{m\pi}{2}}(e^\beta - e^{-\beta}) + \frac{\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}}{2}\left(e^{-\beta}\int_0^\beta \frac{e^\beta d\beta}{\beta^m} - e^\beta\int_0^\beta \frac{e^{-\beta}d\beta}{\beta^m}\right). \end{aligned}\right.$$

Si l'on multiplie la formule (3) par $\sin\frac{m\pi}{2}$, et la formule (4) par $\cos\frac{m\pi}{2}$, et qu'on prenne la différence, il viendra l'intégrale connue

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2} - \beta x\right) . x^{m-1}dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-\beta}.$$

Le premier membre de la formule (2) équivaut à quelques autres intégrales définies bien simples, et qui dépendront, par conséquent, des mêmes transcendantes que celle-là. Pour le faire voir, changeons α en $\beta + \varphi$ dans la formule (1), ce qui donne

$$(5)\qquad \int_0^\infty e^{-\beta x}e^{-\varphi x} . x^{m-1}dx = \frac{\Gamma(m)}{(\beta+\varphi)^m}$$

En multipliant par $\sin\varphi d\varphi$, intégrant entre les limites 0 et ∞, et obser-

vant que

$$\int_0^\infty e^{-\varphi x} . \sin \varphi . d\varphi = \frac{1}{1 + x^2},$$

il viendra

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1 + x^2} = \Gamma(m) \int_0^\infty \frac{\sin \varphi . d\varphi}{(\beta + \varphi)^m}.$$

De même si l'on multiplie la formule (5) par $\cos \varphi . d\varphi$, et qu'on y change m en $m - 1$, l'intégration entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \infty$ donnera

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x} x^{m-1} dx}{1 + x^2} = \Gamma(m - 1) \int_0^\infty \frac{\cos \varphi . d\varphi}{(\beta + \varphi)^{m-1}}.$$

NOTE

SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. La forme sous laquelle j'ai présenté les intégrales définies qui se trouvent dans le chapitre XXXV du *Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, suggère immédiatement une classe analogue d'intégrales multiples, dont l'évaluation ne dépend que des transcendantes abéliennes. C'est ce que je me propose de développer dans cette Note.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n variables, et appelons V l'intégrale définie $\int^n dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, qu'on obtient en attribuant à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toutes les valeurs positives propres à satisfaire à la condition

$$(1) \qquad (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{n}{2}} \leqq f\left(\frac{\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2}}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right).$$

Dans cette inégalité, mettons pour x_1, $a_1\xi_1$, pour x_2, $a_2\xi_2$, et ainsi de suite, elle deviendra

$$(2) \qquad (a_1^2\xi_1^2 + a_2^2\xi_2^2 + \ldots + a_n^2\xi_n^2)^{\frac{n}{2}} \leqq f\left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2}{a_1^2\xi_1^2 + a_2^2\xi_2^2 + \ldots + a_n^2\xi_n^2}\right).$$

et si l'on appelle V′ l'intégrale définie $\int^n d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$, qu'on étend à toutes les valeurs positives de $\xi_1, \xi_2, \ldots$ qui satisfont à la condition (2), on aura évidemment

$$V = a_1 a_2 \ldots a_n V'.$$

Maintenant, si l'on substitue pour $x_1, x_2, \ldots$ les valeurs suivantes,

$$x_1 = \rho\cos\theta, \quad x_2 = \rho\sin\theta\cos\varphi_1, \quad x_3 = \rho\sin\theta\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$

$$x_{n-1} = \rho\sin\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2},$$

$$x_n = \rho\sin\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2},$$

on trouvera, en intégrant par rapport à ρ, depuis $\rho = 0$,

$$V = \frac{1}{n}\int^{n-1} \rho^n\, d\omega_{n-1},$$

où

$$d\omega_{n-1} = \sin^{n-2}\theta\sin^{n-3}\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-3}\, d\varphi_1\, d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-2}\, d\theta.$$

Or on a, d'après la formule (1),

$$\rho^n = f\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi_1}{a_2^2} + \ldots + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-2}\sin^2\varphi_{n-1}}{a_n^2}\right),$$

ce qui donne

$$V = \frac{1}{n}\int^{n-1} f\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi_1}{a_2^2} + \ldots\right) d\omega_{n-1},$$

où l'on prend toutes les variables depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{2}$.

Semblablement, on déduira de la formule (2) que la valeur de V′ peut se transformer dans

$$\frac{1}{n}\int^{n-1} \frac{1}{(a_1^2\cos^2\theta + \ldots + a_n^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-2})^{\frac{n}{2}}} f\left(\frac{1}{a_1^2\cos^2\theta + \ldots + a_n^2\sin^2\theta\ldots\sin^2\varphi_{n-2}}\right) d\omega_{n-1},$$

d'où résulte la relation générale

$$\int^{n-1} f\left(\frac{\cos^2\theta}{a_1^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi_1}{a_2^2} + \ldots + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-2}\sin^2\varphi_{n-1}}{a_n^2}\right) d\omega_{n-1}$$

$$= a_1 a_2\ldots a_n\int^{n-1} \frac{1}{(a_1^2\cos^2\theta + \ldots + a_n^2\sin^2\theta\ldots\sin^2\varphi_{n-2})^{\frac{n}{2}}} f\left(\frac{1}{a_1^2\cos^2\theta + \ldots + a_n^2\sin^2\theta\ldots\sin^2\varphi_{n-2}}\right) d\omega_{n-1},$$

où les limites des variables doivent être 0 et $\frac{\pi}{2}$.

2. Dans ce qui va suivre, nous désignerons par Δ^2 la quantité

$$\cos^2\theta - \alpha_1^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi_1 + \ldots + \alpha_{n-1}^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 \ldots \sin^2\varphi_{n-3} \sin^2\varphi_{n-2}.$$

Cela posé, considérons la fonction Y_p, définie par l'équation

$$Y_p = \int^{n-1} \frac{d\omega_{n-1}}{(1 + m^2\Delta^2)^p}.$$

Lorsque n est un nombre pair, il est évident, d'après la formule (3), que Y_p ne dépendra que des fonctions algébriques, p étant un nombre entier, égal ou supérieur à $\frac{n}{2}$. Si p est inférieur à $\frac{n}{2}$, Y_p s'exprimera à l'aide des fonctions abéliennes, comme on peut le montrer de la manière suivante.

Si l'on différentie Y_p par rapport à m, on en obtiendra

$$\frac{dY_p}{dm} = \frac{2p}{m} \int^{n-1} \left[\frac{1}{(1 + m^2\Delta^2)^{p-1}} - \frac{1}{(1 + m^2\Delta^2)^p} \right] d\omega_{n-1},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(4) \qquad \frac{m}{2p} \frac{dY_p}{dm} + Y_p = Y_{p+1}.$$

Maintenant, si l'on fait dans l'équation (3) la fonction indéterminée égale à 1, et si l'on pose

$$a_1^2 = 1 + m^2, \quad a_2^2 = 1 + \alpha_1^2 m^2, \ldots, \quad a^2 = 1 + \alpha_{n-1}^2 m^2,$$

on aura, en désignant par A la constante $\int^{n-1} d\omega_{n-1}$,

$$(5) \qquad Y_{\frac{n}{2}} = \frac{A}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}},$$

ce qui donne, en faisant $p + 1 = \frac{n}{2}$, dans l'équation (4), et en intégrant ensuite,

$$(6) \qquad Y_{\frac{n}{2}-1} = \frac{(n-2)A}{m^{n-2}} \int \frac{m^{n-3}\,dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}}.$$

On a encore, d'après l'équation (3),

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}} \int^{2n-1} \frac{d\omega_{n-1}}{\left(\frac{\cos^2\theta}{1+m^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{1+\alpha_1^2 m^2} + \ldots\right)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

d'où l'on déduit, en faisant

$$(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2) = M$$

et

$$\frac{M}{1+m^2} - 1 = \nu^2, \quad \frac{M}{1+\alpha_1^2 m^2} - 1 = \beta_1^2\nu^2, \ldots, \quad \frac{M}{1+\alpha_{n-1}^2 m^2} - 1 = \beta_{n-1}^2\nu^2,$$

$$Y_1 = M^{\frac{n-1}{2}} \int^{2n-1} \frac{d\omega_{n-1}}{[1+\nu^2\cos^2\theta + \beta_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1 + \ldots)]^{\frac{n}{2}-1}};$$

ce qui donne, en vertu de l'équation (6),

$$7 \qquad Y_1 = \frac{(n-2)AM^{\frac{n-3}{2}}}{\nu^{n-2}} \int \frac{\nu^{n-2}\,d\nu}{\sqrt{(1+\nu^2)(1+\beta_1^2\nu^2)\ldots(1+\beta_{n-1}^2\nu^2)}}.$$

On déduit Y_2 de Y_1, d'après l'équation (4), par la différentiation par rapport à m, et ainsi de suite Y_3, Y_4, ..., qui, manifestement, ne dépendront que des fonctions à différentielles algébriques.

L'équation (3), ainsi que la réduction des fonctions Y_1, Y_2,... aux transcendantes abéliennes, ont été données par M. Jacobi, dans un Mémoire inséré dans le tome XII du Journal de M. Crelle. Mais la forme sous laquelle l'illustre géomètre de Kœnigsberg a présenté ces résultats diffère beaucoup de celle qu'on vient d'employer.

3. Si l'on multiplie l'équation (4) par dm, et que l'on intègre ensuite, on obtiendra

$$8 \qquad \frac{m}{2p} Y_p - \frac{2p-1}{2p} \int Y_p\,dm = \int Y_{p-1}\,dm,$$

ce qui fait voir que l'intégrale $\int Y_p\,dm$ ne dépendra que des fonctions Y_p... et de l'intégrale $\int Y_{\frac{n}{2}}\,dm$ (n étant un nombre pair, ce qui est le seul cas que nous considérons). D'où l'on conclut que l'intégrale $\int Y_p\,dm$ s'exprimera à l'aide des fonctions abéliennes.

Si l'on prend cette intégrale entre les limites o et ∞, sa valeur de-

vient bien simple. En effet, il est évident que mY_p s'évanouit entre ces limites, en sorte que

$$\int_0^\infty Y_p\,dm = \frac{2p}{2p-1}\int_0^\infty Y_{p+1}\,dm,$$

$$\int_0^\infty Y_{p+1}\,dm = \frac{2p+2}{2p+1}\int_0^\infty Y_{p+2}\,dm.$$

. . . . . .

$$\int_0^\infty Y_{\frac{n}{2}-1}\,dm = \frac{n-2}{n-3}\int_0^\infty Y_{\frac{n}{2}}\,dm,$$

ce qui donne, après avoir mis pour $Y_{\frac{n}{2}}$ sa propre valeur, qu'on tire de la formule (5),

$$(9)\quad \int_0^\infty Y_p\,dm = \frac{2p.2p+2\ldots n-2}{2p-1.2p+1\ldots n-3}\,A\int_0^\infty \frac{dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2\ldots 1-\alpha_{n-1}^2 m^2)}}.$$

D'une manière tout à fait semblable, on pourra voir que

$$(10)\quad \frac{1}{2p}\,Y_p + \int\frac{Y_p\,dm}{m} = \int\frac{Y_{p+1}\,dm}{m},$$

et encore

$$(11)\quad \frac{1}{2pm}\,Y_p + \frac{2p+1}{2p}\int\frac{Y_p\,dm}{m^2} = \int\frac{Y_{p+1}\,dm}{m}.$$

en sorte que les intégrales $\int\frac{Y_p\,dm}{m}$, $\int\frac{Y_p\,dm}{m^2}$ ne dépendront que des fonctions abéliennes.

Cette dernière équation (11) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{A-Y_p}{2pm} + \frac{2p+1}{2p}\int\frac{A-Y_p}{m^2}\,dm = \int\frac{A-Y_{p+1}}{m^2}\,dm.$$

Or $\frac{A-Y_p}{2pm}$ devient nulle entre les limites 0 et ∞; ce qui donnera, apres quelques réductions,

$$\int^\infty \frac{A-Y_p}{m^2}\,dm = \frac{2p.2p+2\ldots n-2}{2p+1.2p+3\ldots n-1}\int_0^\infty \frac{A-Y_{\frac{n}{2}}}{m^2}\,dm.$$

Maintenant, si l'on désigne par M la quantité

$$1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2\ldots 1-\alpha_{n-1}^2 m^2.$$

on verra sans difficulté que

$$\int\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)\frac{dm}{m^2}=-\frac{1}{m}+\frac{1}{m\sqrt{M}}$$
$$+\int\left(\frac{1}{1+m^2}-\frac{\alpha_2^2}{1+\alpha_2^2 m^2}+\frac{\alpha_3^2}{1+\alpha_3^2 m^2}+\ldots\right)\frac{dm}{\sqrt{M}}.$$

et de cette équation, en prenant m depuis o jusqu'à ∞, et la multipliant par A, on déduira

$$\int_0^\infty \frac{A-Y_2}{m}\,dm=A\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+m^2}+\frac{\alpha_2^2}{1+\alpha_2^2 m^2}+\ldots+\frac{\alpha_{n-1}^2}{1+\alpha_{n-1}^2 m^2}\right)\frac{dm}{\sqrt{M}};$$

d'où il résulte que

$$(12)\qquad \int_0^\infty \frac{A-Y_2}{m^2}\,dm=\frac{2p.2p-2\ldots n-2}{2p+1.2p+3\ldots n-1}\,A\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+m^2}+\frac{\alpha_2^2}{1+\alpha_2^2 m^2}+\ldots\right)\frac{dm}{\sqrt{M}}.$$

4. Comme application des propriétés qu'on vient de constater, supposons qu'il s'agisse de déterminer la valeur de l'intégrale multiple définie

$$u=\int^{n-1}\frac{\operatorname{arc\,tang} m\Delta}{\Delta}\,d\omega_{n-1}.$$

La différentiation par rapport à m donne

$$\frac{du}{dm}=\int^{n-1}\frac{d\omega_{n-1}}{1+m^2\Delta}=Y_1.$$

et

$$(13)\qquad u=\int Y_1\,dm.$$

Par conséquent, cette intégrale s'exprime par des fonctions abéliennes qui peuvent être calculées à l'aide des méthodes que nous venons d'exposer.

Si dans la valeur de Δ on fait

$$\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_{n-1}.$$

cette quantité se réduira à

$$\cos^2\theta-\alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1+\alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1.$$

et l'on peut effectuer immédiatement l'intégration par rapport à φ_2, $\varphi_3,\ldots,\varphi_{n-2}$, ce qui n'ajoutera qu'un coefficient constant. D'ailleurs,

Y_1, Y_2,... se réduiront aux fonctions circulaires ou logarithmiques, et $\int Y_n\,dm$ s'exprimera par des fonctions elliptiques, en sorte que l'intégrale double

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{arc}\left[\operatorname{tang} m\sqrt{\cos^2\theta+\alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1+\alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1}\right]}{\sqrt{\cos^2\theta+\alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1+\alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1}}\sin^{n-2}\theta\sin^{n-3}\varphi_1\,d\theta\,d\varphi_1$$

ne dépendra que des fonctions elliptiques, circulaires ou logarithmiques.

Si dans la formule (13) on pose $m=\infty$, on aura

$$\frac{\pi}{2}\int^{n-1}\frac{d\omega_{n-1}}{\Delta}=\int_0^\infty Y_1\,dm,$$

d'où, en faisant

$$\int^{n-2}\sin^{n-2}\theta\,\sin^{n-3}\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-3}\,d\varphi_1\,d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-3}\,d\theta=A',$$

on trouve, en vertu de la formule (9),

$$(14)\quad \int^{n-1}\frac{d\omega_{n-1}}{\Delta}=\frac{2.4.6\ldots n-2}{1.3.5\ldots n-3}A'\int_0^\infty\frac{dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2m^2)}}.$$

et, en faisant $\alpha_2=\alpha_3\ldots=\alpha_{n-1}$, et en mettant pour A' sa valeur actuelle,

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^{n-2}\theta\,\sin^{n-3}\varphi_1\,d\theta\,d\varphi_1}{\sqrt{(\cos^2\theta+\alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1+\alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1)}}\\&\qquad=\frac{2.4\ldots n-4}{3.5\ldots n-3}\int_0^\infty\frac{dm}{(1+\alpha_1^2m^2)^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2m^2)}}.\end{aligned}\right.$$

Cette équation a lieu lorsque $n>4$. Pour le cas particulier de $n=4$, on a

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\theta\sin\varphi_1\,d\theta\,d\varphi_1}{\sqrt{(\cos^2\theta+\alpha_1^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_1+\alpha_2^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_1)}}\\&\qquad=\int_0^\infty\frac{dm}{(1+\alpha_1^2m^2)\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_2^2m^2)}}.\end{aligned}\right.$$

5. Soit encore

$$u=\int^{n-4}(\operatorname{arc}\operatorname{tang} m\Delta)\,\Delta\,d\omega_{n-1},$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dm} = \frac{1}{m^2}\int^{n-1}\left(1 - \frac{1}{1+m^2\Delta^2}\right)d\omega_{n-1} = \frac{A - Y_1}{m^2},$$

et

$$u = \int \frac{A - Y_1}{m}\,dm, \tag{17}$$

et l'on voit que u s'exprime par des fonctions abéliennes.

En faisant dans la formule (17) $m = \infty$, on déduit aisément, à l'aide de la formule (12),

$$\int^{n-1}\Delta d\omega_{n-1} = \frac{2.4\ldots n-2}{3.5\ldots n-1}A'\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+m^2} + \frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1^2 m^2} + \ldots\right)\frac{dm}{\sqrt{(1+m^2)\ldots(1+\alpha_{n-1}^2 m^2)}}. \tag{18}$$

On peut encore déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int^{n-1}\log\Delta d\omega_{n-1},$$

car, en la mettant sous la forme

$$\int^{n-1}\log(1 + m^2\Delta^2\,d\omega_{n-1},$$

ce qui nous est permis, et en la désignant par u, on aura

$$\frac{du}{dm} = \frac{2}{m}\int^{n-1}\left(1 - \frac{1}{1+m^2\Delta^2}\right)d\omega_{n-1} = \frac{2A}{m} - \frac{2}{m}Y_1.$$

et

$$u = 2A\log m - 2\int\frac{Y_1\,dm}{m}. \tag{19}$$

en sorte que cette intégrale, d'après la formule (10), ne dépendra que des fonctions abéliennes.

Si n est égal à 4, on aura, d'après les formules (5) et (6),

$$Y_2 = \frac{A}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)(1+\alpha_2^2 m^2)(1+\alpha_3^2 m^2)}},$$

$$Y_1 = \frac{2A}{m^2}\int\frac{m\,dm}{\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)(1+\alpha_2^2 m^2)(1+\alpha^2 m^2)}},$$

et par conséquent, en vertu de la formule (10),

$$\int\frac{Y_1\,dm}{m} = A\int\frac{dm}{m\sqrt{(1+m^2)(1+\alpha_1^2 m^2)\ldots(1+\alpha_2^2 m^2)}} - \frac{A}{m^2}\int\frac{m\,dm}{\sqrt{(1+m^2)\ldots(1+\alpha^2 m^2)}},$$

ce qui donnera

$$\int^{3} \log(1 - m^2 \Delta^2)\, d\omega_3$$
$$= 2A \log m - 2A \int \frac{dm}{m\sqrt{1 - m^2 \ldots 1 + \alpha^2 m^2}}$$
$$- \frac{2A}{m^2} \int \frac{m\,dm}{\sqrt{1 + m^2 \ldots (1 + \alpha^2 m^2}}.$$

en sorte que, dans ce cas, l'intégrale dont il s'agit s'exprimera à l'aide des fonctions elliptiques.

Si, dans cette formule, on pose $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, on trouvera, en se rappelant que l'intégrale devient nulle pour $m = 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + m^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2} \left\{ \log \left[\frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{2} \right] - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + m^2} - 1}{m^2} \right\}.$$

d'où, en faisant $\frac{m^2}{1 + m^2} = k^2$, on déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1}{1 - k^2 \sin^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \left[\log\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - k^2}}\right) - \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} \right],$$

ce qui s'accorde avec une formule bien connue.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE POISSON;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Je vais donner une démonstration que je crois nouvelle du théoreme de Poisson bien connu, savoir,

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} f(m\cos\theta + n\sin\theta\sin\varphi + p\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{+1} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\, du.$$

Considérons un ellipsoïde de révolution autour de son grand axe; on sait que son équation sera, par rapport aux trois axes rectangulaires d'une direction arbitraire qui passent par le foyer,

$$R = mx + ny + pz + q,$$

R étant le rayon vecteur de l'origine à un point quelconque x, y, z.

Concevons aussi une sphère du rayon 1 décrite autour du foyer, et multiplions chaque élément de la surface sphérique par une fonction quelconque du rayon correspondant de l'ellipsoïde. La somme qu'on obtient en étendant ce procédé à la surface entière s'exprimera par l'intégrale double

$$(1)\qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F\left[\frac{q}{1 - m\cos\theta + n\sin\theta\sin\varphi + p\sin\theta\cos\varphi}\right]\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Maintenant, l'équation de l'ellipsoïde sera, en comptant l'angle polaire θ, à partir de l'axe de révolution,

$$R = \frac{q}{1 - \sqrt{m^2+n^2+p^2}\cos\theta},$$

en sorte que la somme dont il s'agit sera aussi exprimée par l'intégrale simple

$$2 \qquad 2\pi \int_0^{\pi} F\left(\frac{q}{1-\sqrt{m+n+p\cos\varsigma}}\right) \sin\varsigma \, d\varsigma.$$

En égalant les expressions (1) et (2), on retombe évidemment sur le théorème de Poisson.

On pourrait penser qu'on aurait des résultats différents en considérant des surfaces autres que l'ellipsoïde de révolution; mais il n'est pas difficile de prouver que, quelle que soit la surface de révolution que l'on considère, on n'obtiendra jamais que le théoreme de Poisson. J'ai choisi le sphéroïde, à cause de sa simplicité.

NOTE

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. E. CATALAN.

Trouver une surface, passant par une courbe donnée, et telle, qu'un point matériel sollicité par la pesanteur, étant posé sur la surface en un point de la courbe, avec une vitesse de grandeur et de direction convenables, parcoure cette courbe.

Supposons la courbe rapportée à trois axes rectangulaires, celui des z étant vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur. Soient

$$(1)\qquad x = f(z), \quad y = f_1(z)$$

les équations de cette ligne. La surface cherchée aura une équation de la forme

$$(2)\qquad x - f(z) = [y - f_1(z)]\varphi(y, z).$$

D'un autre côté, lorsqu'un point matériel se meut sur une surface, l'une des équations de sa trajectoire est, en employant les notations ordinaires,

$$(3)\qquad p\,d.v\frac{dy}{ds} = q\,d.v\frac{dx}{ds}.$$

Si cette trajectoire doit être la courbe donnée, les quantités v, $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ sont des fonctions de z, déduites des équations (1), et les quantités p et q sont ce que deviennent les dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, tirées de l'équation (2), quand on remplace, dans ces valeurs, x et y par $f(z)$ et $f_1(z)$.

Or l'équation (2) donne

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{f'(z) + [y - f_1(z)]\frac{d\varphi}{dz} - f_1'(z)\,\varphi(y, z)},$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{[y - f_1(z)]\frac{d\varphi}{dz} + \varphi(y, z)}{f'(z) + [y - f_1(z)]\frac{d\varphi}{dz} - f_1'(z)\,\varphi(y, z)};$$

donc, pour les points de la courbe (1),

$$p = \frac{1}{f'(z) - f_1'(z)\,\varphi[f_1(z), z]}, \quad q = -\frac{\varphi[f_1(z), z]}{f'(z) - f_1'(z)\,\varphi[f_1(z), z]}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (3) donneront

$$\varphi[f_1(z), z] = F(z). \tag{4}$$

$F(z)$ étant une fonction connue.

La question proposée se réduit donc actuellement à la détermination d'une fonction $\varphi(y, z)$, qui satisfasse à la condition (4).

Il est évident qu'une pareille fonction sera donnée par la formule

$$\varphi(y, z) = F(z) + [y - f_1(z)]\,\psi(y, z),$$

ψ étant une fonction arbitraire. Par suite, l'équation de la surface cherchée sera

$$x - f(z) = [y - f_1(z)]\,F(z) + [y - f_1(z)]^2\,\psi(y, z). \tag{5}$$

Dans les applications, il sera souvent commode de mettre les équations de la trajectoire sous une forme autre que celle des équations (1). C'est ce que l'on reconnaît sur l'exemple suivant.

Supposons que la courbe proposée soit une hélice. Si on la représente par

$$x = R\cos k\frac{z}{R}, \quad y = R\sin k\frac{z}{R},$$

l'équation de la surface se présente sous une forme compliquée. Mais remplaçons ces deux équations par

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad z - \frac{R}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = 0.$$

nous pourrons supposer que l'équation de la surface est

$$z - \frac{R}{k} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = (x^2 + y^2 - R^2)\varphi(x, y).$$

On déduit, de cette équation,

$$p = -\frac{1}{k} \sin k \frac{z}{R} + 2R \cos k \frac{z}{R} \varphi_1,$$

$$q = \frac{1}{k} \cos k \frac{z}{R} + 2R \sin k \frac{z}{R} \varphi_1,$$

en posant, pour abréger,

$$\varphi\left(R \cos k \frac{z}{R}, R \sin k \frac{z}{R}\right) = \varphi_1.$$

Supposons que les coordonnées de la position initiale du point matériel soient

$$x = R, \quad y = 0, \quad \text{d'où} \quad z = 0.$$

Nous aurons, à un instant quelconque,

$$v = \sqrt{2gz}.$$

De plus,

$$dx = -k \sin k \frac{z}{R} dz, \quad dy = k \cos k \frac{z}{R} dz, \quad \text{etc.}$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation (3) devient

$$\left[-\frac{1}{k} \sin k \frac{z}{R} - 2R \cos k \frac{z}{R} \varphi_1\right] d\left(\sqrt{z} \cos k \frac{z}{R}\right)$$
$$- \left[\frac{1}{k} \cos k \frac{z}{R} + 2R \sin k \frac{z}{R} \varphi_1\right] d\left(\sqrt{z} \sin k \frac{z}{R}\right) = 0;$$

ou, en réduisant,

$$\varphi_1 = -\frac{z}{R}.$$

L'équation de la surface cherchée sera donc

$$z = \frac{R}{k} \frac{\operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}{x^2 + y^2} + \frac{R^2(x^2 + y^2 - R^2)}{x^2 + y^2} \varphi(x^2 + y^2 - R^2)$$

Si nous supposons $\psi = 0$, l'équation se réduit à

$$z = \frac{R^2}{k} \frac{\operatorname{arctang} \frac{y}{x}}{x^2 + y^2},$$

ou, en posant $x = u \cos \omega$, $y = u \sin \omega$,

$$(A) \qquad z = \frac{R^2 \omega}{k u^2}.$$

La surface représentée par cette équation (A) est remarquable. En effet : 1° les sections faites par des cylindres de révolution autour de l'axe des z sont des hélices ; 2° les sections faites par des plans passant suivant cet axe sont des courbes hyperboliques, asymptotes à l'axe des z et à la trace du plan sécant sur le plan des xy ; 3° les sections horizontales sont des spirales ; 4° les lignes de plus grande pente sont représentées par $u = Ce^{-\omega^2}$, etc.

Il y a plus : si un point matériel est posé sur cette surface, en un point quelconque de l'axe des x, la trajectoire de ce point sera une hélice. C'est ce que l'on reconnaît aisément en prouvant que toutes les hélices de la surface vérifient l'équation (3), si $v = \sqrt{2gz}$.

Note sur la propriété de la cycloïde, d'être la seule tautochrone dans le vide;

PAR M. E.-L. GUILLON,
Élève de l'École Normale, ancien élève de l'École centrale des Arts et Manufactures.

Supposons qu'une courbe AM puisse être une tautochrone, sans coïncider avec la cycloïde tautochrone AN qui a son sommet au point A, le plus bas de la courbe AM, et qui y possède même cercle osculateur que AM. Les oscillations infiniment petites d'un point matériel pesant seront de même durée sur les deux courbes.

Cela posé, soient m un point de AM infiniment voisin de A, et mn une horizontale qui coupe la cycloïde en n; il pourra se présenter deux cas : ou bien la tangente en m à la courbe AM sera plus inclinée sur l'horizontale AX que celle de la cycloïde en n, ou bien elle le sera moins. Supposons d'abord que le premier cas ait lieu, et admettons que la courbe AM ne soit pas de telle nature que la différence entre le coefficient angulaire de sa tangente et celui de la tangente à la cycloïde, pour deux points ainsi placés sur une même horizontale, puisse changer de signe un nombre infini de fois dans une étendue infiniment petite; alors, ce qui arrive aux deux points m et n infiniment voisins de A aura lieu jusqu'à une horizontale $m'n'$ située au-dessus de l'horizontale AX à une distance finie qui pourra d'ailleurs être très-petite. Il résulte de là que si l'on conçoit une infinité d'horizontales, infiniment rapprochées, comprises entre AX et $m'n'$, elles partageront les arcs Am' et An' en éléments correspondants toujours plus inclinés sur l'horizontale et, par conséquent, plus petits pour la première courbe que pour la seconde. Cela étant, supposons que deux points matériels pesants, se mouvant sur les courbes AM et AN, partent en même temps, sans vitesse, l'un de m', l'autre de n'; les vitesses qu'ils auront seront les mêmes lorsqu'ils parcourront deux éléments correspondants; donc le premier arrivera en A plus tôt que le second.

Si l'on avait supposé la tangente en m moins inclinée qu'en n, on aurait trouvé, au contraire, que le point qui parcourt la cycloïde doit arriver en A plus tôt que l'autre. Or la durée de la descente sur la cycloïde est toujours la même, et égale à la durée de la descente infiniment petite sur la courbe AM; donc sur AM la durée de l'oscillation depend de son amplitude, ou, en d'autres termes, la courbe AM n'est pas une tautochrone.

LETTRES

SUR DIVERSES QUESTIONS D'ANALYSE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE CONCERNANT L'ELLIPSOÏDE,

ADRESSÉES A M. P.-H. BLANCHET,

PAR J. LIOUVILLE.

PREMIÈRE LETTRE.

Monsieur,

Vous avez bien voulu me prier d'entrer dans quelques développements au sujet de certaines formules que j'ai données sans démonstration à la page 227 du tome X du *Journal de Mathématiques*. Je cède volontiers à votre désir et vous sais gré d'avoir porté un moment votre attention sur ces formules auxquelles j'attache, je l'avoue, beaucoup de prix, à cause du rôle qu'elles doivent jouer dans la plupart des grandes questions physico-mathématiques concernant l'ellipsoïde. Mais permettez-moi quelques détails préliminaires relatifs aux *coordonnées elliptiques*, dont les géomètres, dans ces derniers temps, ont fait si souvent usage.

Dans ce système de coordonnées on regarde chaque point m de l'espace comme déterminé par l'intersection de trois surfaces du second degré, homofocales et, par conséquent, se coupant à angle droit; les équations de ces trois surfaces étant

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

ρ, μ, ν sont les coordonnées elliptiques du point m qui a pour coordonnées ordinaires x, y, z. On suppose $b < c$, $\rho > c$, μ compris entre b et c, $\nu^2 > b^2$.

D'après les formules précédentes, ρ^2, μ^2, ν^2 sont les racines de l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

qui est du troisième degré en ρ^2, et qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\rho^6 - (x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2) \\ &\qquad + \rho^2 [(b^2 + c^2) x^2 + c^2 y^2 + b^2 z^2 + b^2 c^2] - b^2 c^2 x^2 = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2, \\ &\rho^2\mu^2 + \rho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = (b^2 + c^2) x^2 + c^2 y^2 + b^2 z^2 + b^2 c^2, \\ &\rho^2\mu^2\nu^2 = b^2 c^2 x^2; \end{aligned}$$

et de là on tire

$$\begin{aligned} bcx &= \rho\mu\nu, \\ b\sqrt{c^2 - b^2}\, y &= \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}, \\ c\sqrt{c^2 - b^2}\, z &= \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}, \end{aligned}$$

les seconds membres devant être toutefois affectés de signes convenables. Pour parcourir, en effet, l'ellipsoïde qui répond à chaque valeur déterminée de ρ, il faut faire varier ν entre les limites $-b$, $+b$, admettant ainsi pour ν des valeurs négatives; et de même il faut prendre les radicaux $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \mu^2}$, qui peuvent s'évanouir, tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$, ces radicaux changeant de signe en s'évanouissant. C'est sans doute pour éviter ces discussions de signes que M. Jacobi introduit deux angles dont les sinus et cosinus prennent naturellement leurs signes ordinaires sans qu'on ait besoin de recourir à aucune convention nouvelle. En effet, d'après les limites imposées aux valeurs de μ et ν, on peut faire

$$\nu = b\cos\psi, \quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

d'où

$$\sqrt{b^2 - \nu^2} = b \sin \psi,$$

$$\sqrt{\mu^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - b^2}.\cos \varphi, \quad \sqrt{c^2 - \mu^2} = \sqrt{c^2 - b^2}.\sin \varphi;$$

on a ainsi les expressions de x, y, z en ρ, φ, ψ :

$$x = \frac{\rho \cos \psi}{c} \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

$$y = \sqrt{\rho^2 - b^2}.\sin \psi \cos \varphi,$$

$$z = \sqrt{\rho^2 - c^2}.\frac{\sin \varphi \sqrt{c^2 - b^2 \cos^2 \psi}}{c};$$

les radicaux qui restent sont essentiellement positifs, et les signes des seconds membres dépendent des sinus et cosinus des angles φ et ψ, angles qu'on doit faire varier de $\psi = 0$ à $\psi = \pi$, et de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$. Mais je m'en tiendrai aux formules en ρ, μ, ν que je crois généralement plus commodes.

En désignant par $d\omega$ l'élément de la surface de l'ellipsoïde (ρ), je veux dire de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

on trouve aisément

$$d\omega = d\mu d\nu \cdot \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}.$$

On a besoin aussi de considérer la distance ds du point (ρ, μ, ν) de l'ellipsoïde (ρ) à l'ellipsoïde infiniment voisin $(\rho + d\rho)$; elle s'exprime par

$$ds = \frac{d\rho}{h},$$

la valeur de h étant donnée par la formule

$$h = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2} = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}.$$

Cette quantité h a une liaison intime avec la perpendiculaire P, abaissée du centre sur le plan tangent à l'ellipsoïde (ρ), au point (ρ, μ, ν) :

car

$$P = \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}} = h\rho.$$

Le produit $Pd\omega$ exprime le triple du volume de la pyramide qui a son sommet au centre O de l'ellipsoïde, et $d\omega$ pour base. Du point O comme centre, et avec un rayon égal à l'unité, décrivons une sphère, et appelons, avec M. Ivory, points *correspondants* de la sphère et de l'ellipsoïde (surface ou volume) les points (x, y, z) et (x, y, z), dont les coordonnées sont liées par les formules

$$x = \rho x, \quad y = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, y, \quad z = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, z;$$

à l'élément $d\omega$ de la surface de l'ellipsoïde *correspondra* un élément $d\sigma$ de la surface de la sphère, et au volume $\frac{1}{3}Pd\omega$ de pyramide ellipsoïdale correspondra un volume $\frac{1}{3}d\sigma$ de pyramide ayant aussi le point O pour centre, mais pour base $d\sigma$. Or il est visible que deux volumes correspondants de la sphère et de l'ellipsoïde sont entre eux dans le rapport de 1 à $\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}$; on a donc

$$\tfrac{1}{3}Pd\omega = \tfrac{1}{3}d\sigma . \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2},$$

et, en faisant

$$l = \frac{P}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{h}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}},$$

on en conclut

$$ld\omega = d\sigma.$$

Le produit $ld\omega$, qui s'exprime ainsi par un élément $d\sigma$ d'une surface sphérique de rayon égal à l'unité, figurera souvent dans nos formules. Il est bon d'observer que son expression en coordonnées elliptiques, savoir

$$ld\omega = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu d\nu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

ne dépend pas de ρ.

Maintenant, je dois vous parler de certaines fonctions auxquelles M. Lamé a été conduit par la considération des coordonnées elliptiques, et dont l'étude approfondie ne peut manquer, à mon avis, de fournir aux géomètres une foule de résultats importants.

M. Lamé a fait voir qu'il existe des fonctions R, entières en ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, pour lesquelles n étant un nombre entier, positif ou nul) on a

$$\rho^2 - b^2 \ (\rho^2 - c^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + [2\rho^3 - b^2 + c^2 \ \rho]\frac{dR}{d\rho} = [n(n+1)\rho^2 - B]\,R.$$

ou bien, si l'on veut,

$$\frac{d^2R}{d\varepsilon^2} = [n(n+1)\rho^2 - B]\,R.$$

en posant

$$\varepsilon = \int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Le paramètre B n'est pas quelconque; il doit être choisi parmi les racines de certaines équations déterminées. M. Lamé a prouvé que ces racines sont toutes réelles; il s'est servi pour cela d'intégrales définies : ajoutons qu'en employant convenablement le théorème ou plutôt la méthode de M. Sturm, on aurait pu démontrer d'une maniere plus simple encore que les racines de chaque équation en B sont réelles et inégales entre elles. A l'entier déterminé n répondent $2n+1$ racines B et $2n+1$ fonctions R. Chacune de ces fonctions comporte en facteur une constante arbitraire. Les unes sont des polynômes en ρ de degré n, les autres sont le produit de $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ ou $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ par un polynôme de degré $n-1$, ou enfin le produit de $\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}$ par un polynôme de degré $n-2$. Les polynômes en ρ dont il s'agit sont de l'une des deux formes $f(\rho^2)$, $\rho f(\rho^2)$, c'est-à-dire ne contiennent que des puissances paires de ρ, ou que des puissances impaires, suivant qu'ils sont eux-mêmes de degré pair, ou de degré impair. Dans tous les cas, le rapport de R à ρ^n tend vers une limite constante et finie lorsque ρ augmente à l'infini; la limite dont nous parlons pourra être, si l'on veut, rendue égale à l'unité, de telle sorte que pour ρ très-grand, on ait, à très-peu près, $R = \rho^n$, et, en admettant cette condition nouvelle, les fonctions R seront complétement déterminées.

Nous désignerons par M et N ce que devient R lorsqu'on y change c en μ et en ν, avec l'attention toutefois d'écrire $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ au lieu de $\sqrt{\mu^2 - c^2}$, et $\sqrt{c^2 - \nu^2}$, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$ au lieu de $\sqrt{\nu^2 - c^2}$, $\sqrt{\nu^2 - b^2}$, afin d'éviter les imaginaires.

M. Lamé a démontré quelques propriétés des fonctions M et N, et nous pourrions, à ce qu'il a donné, ajouter beaucoup de résultats nouveaux. Mais cela nous écarterait trop de notre objet. J'y reviens en vous parlant d'une quatrième fonction S, qu'il faut absolument joindre aux trois précédentes R, M, N pour obtenir une théorie complète. La fonction S satisfait à la même équation différentielle que R. Je la définis en posant

$$S = (2n+1)R\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}},$$

ce qui suppose

$$S\frac{dR}{d\rho} - R\frac{dS}{d\rho} = \frac{2n+1}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}},$$

ou bien

$$S\frac{dR}{d\varepsilon} - R\frac{dS}{d\varepsilon} = 2n+1.$$

De là résulte

$$\frac{1}{S}\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = \frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\varepsilon^2};$$

ainsi S et R satisfont bien à la même équation différentielle

$$\frac{d^2U}{d\varepsilon^2} = [n(n+1)\rho^2 - B]U,$$

dont elles sont deux intégrales particulières, fournissant par leur réunion l'intégrale complète. On a $S = 0$ pour $\rho = \infty$, et, pour des valeurs de ρ très-grandes, on a, à très-peu près, $S = \frac{1}{\rho^{n+1}}$.

Il est aisé de former les fonctions R, M, N, S, relatives aux valeurs successives 0, 1, 2,..., de n. Pour $n = 0$, il n'y a qu'une seule racine $B = 0$, par suite une seule fonction $R = 1$, à laquelle répondent $M = 1$, $N = 1$, et

$$S = \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Pour $n = 1$, on a trois valeurs de B, et trois valeurs correspondantes

de R, savoir

$$B = b^2 + c^2, \quad R = \rho,$$

$$B = c^2, \quad R = \sqrt{\rho^2 - b^2},$$

$$B = b^2, \quad R = \sqrt{\rho^2 - c^2};$$

et ainsi des autres.

Les fonctions R, M, N, relatives à un couple (n, B) quelconque, fournissent des solutions particulières de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

M. Lamé a prouvé, en effet, que cette équation est satisfaite en posant

$$u = \mathrm{RMN}.$$

Le second membre est fonction de ρ, μ, ν, mais on peut l'exprimer en x, y, z; et il se transforme alors en un polynôme de degré n par rapport à ces coordonnées. Cela paraîtra d'abord évident si R est de la forme $f(\rho^2)$; car on aura alors

$$\mathrm{RMN} = f(\rho^2) f(\mu^2) f(\nu^2),$$

et le second membre étant une fonction entière symétrique et du degré $\frac{1}{2}n$, par rapport aux quantités ρ^2, μ^2, ν^2, racines de l'équation

$$\rho^6 - \rho^4 (x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2)$$
$$+ \rho^2 [(b^2 + c^2) x^2 + c^2 y^2 + b^2 z^2 + b^2 c^2] - b^2 c^2 x^2 = 0.$$

s'exprimera par les formules connues au moyen des coefficients de cette équation, ce qui conduira à un polynôme du même degré en x^2, y^2, z^2, ou du degré n en x, y, z. Et si R, outre un facteur de la forme $f(\rho^2)$, contient quelque facteur comme ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, ou $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, la dernière conclusion subsistera puisque, d'après les valeurs mêmes de x, y, z en ρ, μ, ν, les produits

$$\rho\mu\nu, \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}, \quad \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2},$$

s'expriment respectivement par les produits de ces coordonnées x, y, z, et d'une constante. On voit aussi que chaque polynôme RMN est une

fonction entière de x^2, y^2, z^2, ou le produit d'une telle fonction par un des facteurs suivants

$$x,\ y,\ z,\ xy,\ xz,\ yz,\ xyz.$$

L'étude des polynômes RMN considérés en eux-mêmes, indépendamment des coordonnées ρ, μ, ν, offre un grand intérêt. Mais je ne puis m'en occuper ici.

Pour démontrer que

$$u = \mathrm{RMN}$$

donne

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

M. Lamé se sert uniquement des équations différentielles dont R, M, N dépendent, et puisque S satisfait à la même équation que R, il s'ensuit qu'en posant

$$u = \mathrm{SMN},$$

on trouverait encore pour u l'équation aux différences partielles indiquée.

Ces préliminaires établis, j'entre en matière. Soit Δ la distance de deux points (ρ, μ, ν), (ρ, μ', ν'), ou m, m', pour lesquels ρ est le même, et qui sont, par conséquent, situés sur un même ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Soient, de plus, $d\omega'$ l'élément de la surface ellipsoïdale en m', et l' le quotient obtenu en divisant par le produit des trois demi-axes la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en m' (vous allez rencontrer ici le produit $l'd\omega'$ ou $ld\omega$ dont il a été question ci-dessus). Considérons comme appartenant au point m ou (ρ, μ, ν) les fonctions R, M, N, S que nous avons définies tout à l'heure et qui dépendent, R et S de ρ seulement, M de μ seulement, et N de ν. Au point m' ou (ρ, μ', ν'), R et S demeurent les mêmes puisque ρ ne change pas; mais M et N prendront de nouvelles valeurs M', N', fonctions respectivement de μ' et de ν'. Maintenant je dis qu'on aura

$$\text{(A)} \qquad \iint \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\,d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi\,\mathrm{RSMN}}{2n+1}.$$

Telle est la formule, à mon avis fondamentale, dont vous me demandez surtout la démonstration et qui se complète par ces deux autres où Δ désigne la distance de deux points quelconques, m, m' ou (ρ, μ, ν), (ρ', μ', ν') pour lesquels les paramètres ρ, ρ' ne sont plus égaux:

$$\text{B)} \qquad \iint \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\,d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi\,\mathrm{RS}'\mathrm{MN}}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

et

$$\text{C)} \qquad \iint \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\,d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi\,\mathrm{R}'\mathrm{SMN}}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Dans ces trois formules, l'intégration doit être étendue à la surface entière de l'ellipsoïde qui passe par le point m' et dont un élément quelconque est exprimé par $d\omega'$. L'intégrale

$$\iint \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\,d\omega'}{\Delta}$$

exprime toujours le *potentiel*, relativement au point m, d'une matière distribuée sur la surface de l'ellipsoïde qui passe en m', la densité de la distribution pour chaque point m' étant mesurée par la fonction $l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'$ des coordonnées (μ', ν') de ce point qui occupe successivement toutes les positions possibles sur l'ellipsoïde. Mais la formule (A) se rapporte au cas d'un point m situé sur la surface même dont on prend le potentiel, la formule (B) au cas d'un point intérieur, et la formule (C) au cas d'un point extérieur.

Ce n'est pas sans raison que je vous parle ici de *potentiels*. D'abord si les formules (A), (B), (C) sont d'un très-grand secours dans une foule de questions physico-mathématiques, cela tient en grande partie à ce que leurs premiers membres expriment des potentiels. Et puis la considération de ces quantités et de leurs propriétés sera la base de la démonstration que je vais vous donner ici des formules (A), (B), (C), démonstration que je choisis comme une des plus simples et des plus claires parmi celles que j'ai obtenues.

D'après un théorème connu, qui s'étend à des surfaces quelconques, mais que nous allons ici appliquer spécialement à l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

on pourra toujours trouver une fonction λ ou λ' relative à chaque point déterminé sur cet ellipsoïde par les coordonnées μ, ν, ou μ', ν', et qui soit telle que l'on ait généralement

$$\text{I} \qquad \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \text{MN},$$

Δ étant la distance de deux points quelconques (μ, ν), (μ', ν'), ou, si l'on veut, (ρ', μ, ν), (ρ', μ', ν'), pris sur la surface.

Cherchons la valeur de λ. Pour cela, donnons d'abord à Δ une signification plus étendue, en désignant par cette lettre la distance d'un point quelconque (ρ', μ', ν') de la surface à un point quelconque (ρ, μ, ν), de l'*intérieur*, et posons

$$u = \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} - \frac{\text{RMN}}{\text{R}'}.$$

A la surface, ou pour $\rho = \rho'$, on aura $u = 0$. Pour un point quelconque (ρ, μ, ν) de l'intérieur, on trouve

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0;$$

cela résulte de ce que $\frac{1}{\Delta}$ et RMN satisfont séparément à cette équation aux différences partielles. D'ailleurs, ni la fonction u, ni même ses dérivées d'ordre quelconque ne deviennent infinies ou discontinues dans l'espace que nous considérons. Il suit donc d'un théorème de Green, que dans tout cet espace on a $u = 0$, c'est-à-dire que

$$\text{II} \qquad \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \frac{\text{RMN}}{\text{R}'}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

Peut-être est-il bon de rappeler en peu de mots la démonstration du théorème sur lequel je viens de m'appuyer en dernier lieu. Pour cela, multiplions par $u dx dy dz$, et intégrons, dans tout l'espace intérieur de l'ellipsoïde, l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on a

$$\int u \frac{d^2u}{dx^2} dx = u \frac{du}{dx} - \int \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx;$$

mais en passant de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie, le terme $u\frac{du}{dx}$ disparaît, puisque les limites sont relatives à la surface pour laquelle on a constamment $u = 0$. En ayant égard à cette remarque, on trouve sans difficulté

$$\int\int\int\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]dxdydz = 0.$$

d'où

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0,$$

et partant

$$u = \text{constante}.$$

La valeur de u, étant nulle à la surface, l'est donc aussi pour tous les points intérieurs.

En désignant par Δ la distance d'un point quelconque (ρ', μ', ν') de la surface à un point quelconque (ρ, μ, ν) de l'*extérieur*, et en observant que la fonction

$$u = \int\int\frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} - \frac{\text{SMN}}{\text{S}'}$$

est encore nulle à la surface, et satisfait au dehors à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz} = 0,$$

à quoi il faut ajouter que u et les dérivées partielles de u sont fonctions continues de x, y, z, ou ρ, μ, ν, et s'évanouissent pour $\rho = \infty$, on conclura semblablement que

$$\text{III)} \qquad \int\int\frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \frac{\text{SMN}}{\text{S}'} \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Cette fois, en intégrant l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

multipliée par $udxdydz$, on devra étendre l'intégration à tout l'espace infini situé hors de l'ellipsoïde. Pour plus de clarté, on n'intégrera d'abord que dans l'espace compris entre l'ellipsoïde (ρ') et un ellipsoïde quelconque (ρ). Les termes qui, dans l'intégration par par-

ties, sont relatifs à la surface (ρ'), disparaîtront comme tout à l'heure, et quant à ceux qui se rapportent à la surface (ρ), on verra sans peine, par la manière dont S diminue quand ρ augmente, que l'intégrale double qui les concerne s'évanouit aussi pour $\rho = \infty$.

De l'équation

$$\int\int\int\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]dxdydz = 0,$$

j'ai conclu

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad u = \text{constante} = 0,$$

et j'en avais le droit, puisque la valeur de u est réelle, et s'évanouit à la surface (ρ'). Mais, quand même la fonction u serait imaginaire et de la forme $u_1 + u_2\sqrt{-1}$, on arriverait à la même conclusion générale $u = 0$; car, dès que u satisfait à l'équation indéfinie

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

et à la condition de s'évanouir à la surface (ρ'), u_1 et u_2 devront jouir de la même propriété, en sorte que les raisonnements ci-dessus s'appliqueront aux deux parties séparées dont u se compose.

La valeur de u serait imaginaire si la racine B dont elle dépend l'était elle-même; et vous voyez que, pour appliquer notre analyse, il n'est pas absolument nécessaire d'avoir prouvé d'avance la réalité des racines B.

La formule (I) une fois admise entraîne, comme vous le voyez, les formules (II) et (III), en sorte que le potentiel

$$\int\int\frac{\lambda' d\omega'}{\Delta},$$

qui d'abord n'était connu que pour les points de la surface, l'est maintenant pour tous les points intérieurs ou extérieurs. Nous pouvons en déduire les composantes normales à la surface des actions exercées sur deux points infiniment voisins, l'un extérieur et l'autre intérieur, par la matière qui produit ce potentiel; puis égaler, en vertu d'un théorème connu, la différence de ces deux composantes à $4\pi\lambda$, λ étant ce que devient λ' pour l'élément $d\omega$ auquel les deux points sont contigus.

La composante de l'action exercée sur un point dans la direction d'un élément ds est exprimée, comme on sait, par $\frac{dV}{ds}$, V étant le potentiel. Prenons pour ds une très-petite droite normale à l'ellipsoïde ρ et exprimant la distance de cet ellipsoïde à l'ellipsoïde infiniment voisin qui répond au paramètre $\rho + d\rho$; nous aurons

$$ds = \frac{d\rho}{h}, \quad \frac{dV}{ds} = h\frac{dV}{d\rho}.$$

Mais pour un point intérieur on a

$$V = \frac{RMN}{R'}.$$

La composante normale demandée est donc alors

$$\frac{hMN}{R'} \cdot \frac{dR}{d\rho},$$

et quand on se place à une distance infiniment petite de l'ellipsoïde ρ', c'est-à-dire quand on pose $\rho = \rho'$, ou bien $\rho' = \rho$, ce qui nous sera plus commode, elle devient

$$\frac{hMN}{R} \cdot \frac{dR}{d\rho}.$$

On trouve semblablement, pour le point extérieur infiniment voisin, la composante normale

$$\frac{hMN}{S} \cdot \frac{dS}{d\rho};$$

et, en prenant la différence, conformément au théorème invoqué, on obtient

$$4\pi\lambda = \frac{hMN}{RS}\left(S\frac{dR}{d\rho} - R\frac{dS}{d\rho}\right).$$

Mais on a

$$S\frac{dR}{d\rho} - R\frac{dS}{d\rho} = \frac{2n+1}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}},$$

et

$$\frac{h}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = l.$$

On a donc enfin

$$\lambda = \frac{(2n+1)\,l\,\mathrm{MN}}{4\pi\,\mathrm{RS}}, \quad \text{d'où} \quad \lambda' = \frac{(2n+1)\,l'\,\mathrm{M'N'}}{4\pi\,\mathrm{R'S'}},$$

en rétablissant le paramètre ρ' et changeant aussi μ, ν en μ', ν' pour avoir la valeur relative à $d\omega'$.

Substituant cette valeur de λ' dans l'équation (I), on trouve

$$\int\int \frac{l'\,\mathrm{M'N'}\,d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi\,\mathrm{R'S'MN}}{2n+1};$$

c'est la formule (A), avec cette seule différence que dans la formule (A) le paramètre ρ' est remplacé par son égal ρ, et, conséquemment, le produit R'S' par le produit RS.

En substituant la valeur de λ' dans les formules (II) et (III), on obtiendra de même les formules (B) et (C), pour lesquelles ρ et ρ' ne sont plus égaux.

A la valeur $n = 0$ répond, comme nous l'avons vu, une seule fonction $\mathrm{R} = 1$. La formule (A) donne, dans ce cas,

$$\int\int \frac{l'\,d\omega'}{\Delta} = 4\pi \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho-b)(\rho-c)}}.$$

Généralement, si l'on fait

$$\zeta = \mathrm{MN}, \quad m = \frac{4\pi\,\mathrm{RS}}{2n+1},$$

cette formule (A) devient

$$\int\int \frac{l'\,\zeta'\,d\omega'}{\Delta} = m\zeta;$$

m est une constante pour toute la surface (ρ), et ζ seule varie quand on passe d'un point de cette surface à un autre. La forme sous laquelle je viens d'écrire l'équation (A) est d'autant plus remarquable, qu'elle se conserve pour des surfaces quelconques, avec des valeurs convenables de m et de ζ. Vous voyez que les produits MN font partie de ces fonctions ζ dont j'ai dit un mot dans la Note intitulée : *Sur une propriété générale d'une classe de fonctions*. Il s'ensuit qu'en prenant deux de ces produits MN, $\mathrm{M_1N_1}$, pour deux valeurs m, m_1 différentes, on a

$$\int\int l\,\mathrm{MN}\,\mathrm{M_1N_1}\,d\omega = 0,$$

ce qui était déjà démontré par le travail de M. Lamé ; et de cette der-

nière équation on conclut, comme vous savez, que les valeurs de m et B sont essentiellement réelles.

Permettez-moi de vous montrer ici, par un exemple, l'utilité des formules (A), (B), (C). Pour cela reprenons le cas de $n = 0$, où l'on a

$$R = 1, \quad M = 1, \quad N = 1,$$

et

$$S = \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Ces valeurs introduites dans les formules (B) et (C) donnent

$$\iint \frac{l' d\omega'}{\Delta} = 4\pi \int_{\rho'}^\infty \frac{d\rho'}{\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

et

$$\iint \frac{l' d\omega'}{\Delta} = 4\pi \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Ainsi, pour tous les points intérieurs à l'ellipsoïde (ρ'), le potentiel

$$V = \iint \frac{l' d\omega'}{\Delta}$$

conserve une valeur constante; l' est donc la densité de la distribution électrique d'équilibre sur cet ellipsoïde; nous savons d'ailleurs que l' est proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface, ou bien à la distance, comptée normalement en chaque point, de notre ellipsoïde à un autre ellipsoïde infiniment voisin, concentrique, semblable et semblablement placé, et nous retrouvons ainsi un théorème bien connu.

A l'extérieur, la valeur du potentiel V de la couche électrique en chaque point (ρ, μ, ν) est fonction de ρ seulement; donc $\rho = constante$ est l'équation générale des surfaces de niveau, lesquelles se trouvent ainsi être des surfaces elliptiques homofocales, parmi lesquelles notre ellipsoïde lui-même se trouve compris. Quant à la valeur de l'attraction exercée au point (ρ, μ, ν), elle est fournie par la formule

$$\frac{dV}{ds} = h\frac{dV}{d\rho} = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}.l\frac{dV}{d\rho}:$$

elle est donc exprimée, abstraction faite du signe, par

$$4\pi l = \frac{4\pi}{\sqrt{\rho^2 - x^2}\sqrt{\rho'^2 - x^2}}.$$

Enfin la masse agissante est

$$\int\int l' d\omega' = \int\int d\sigma' = 4\pi.$$

Si la masse agissante était prise plus grande ou plus petite, sans que la loi de la distribution fût altérée, le potentiel et l'intensité de l'attraction varieraient dans le même rapport que cette masse. De là on peut conclure immédiatement la valeur de l'attraction d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes concentriques, semblables et semblablement placés. On divisera la valeur ci-dessus par 4π, et on la multipliera par la densité de la couche, puis par son volume, lesquel est au triple du volume total de l'ellipsoïde, comme l'épaisseur de la couche à l'extrémité du demi-axe ρ est à ce demi-axe. Vous comprenez sans peine comment l'on obtient ensuite l'attraction d'une série de couches de ce genre, qui peuvent même être hétérogènes entre elles. Mais tout cela est trop connu aujourd'hui, pour que je croie devoir m'y arrêter. J'aime mieux montrer comment les formules (B) et (C) fournissent immédiatement les trois composantes de l'action exercée par l'ellipsoïde (ρ'), supposé plein et homogène, sur un point quelconque, intérieur ou extérieur.

Or, pour avoir, par exemple, la composante parallèle à l'axe des x, on observera que cette composante dépend de l'intégrale

$$\int\int\int \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} dx'dy'dz',$$

où Δ désigne la distance d'un point quelconque (x', y', z') de la masse au point (x, y, z), de sorte que

$$\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

En effectuant une intégration, cette formule devient

$$\int\int \frac{\cos\alpha' d\omega'}{\Delta}.$$

$d\omega'$ étant l'élément superficiel de l'ellipsoïde, et α' l'angle que la nor-

male à $d\omega'$ fait avec l'axe des x. On a d'ailleurs

$$\cos\alpha' = \frac{P'x'}{\rho'} = l'\mu'\nu'.\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}.$$

La composante cherchée devient donc

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}\int\int\frac{l'\mu'\nu'd\omega'}{\Delta}.$$

et Δ est à présent la distance de l'élément $d\omega'$ au point (x, y, z ou ρ, μ, ν). Mais à $n = 1$, et $B = b^2 + c^2$, répond la fonction $R = \rho$, et, par suite, les fonctions

$$M = \mu, \quad N = \nu, \quad S = 3\rho\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

En appliquant à ces fonctions les formules (2) et (3), on a donc

$$\int\int\frac{l'\mu'\nu'd\omega'}{\Delta} = 4\pi\rho'\mu\nu.\rho'\int_{\rho'}^\infty \frac{d\rho'}{\rho'^2\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

pour $\rho < \rho'$, et

$$\int\int\frac{l'\mu'\nu'd\omega'}{\Delta} = 4\pi\rho'\mu\nu.\rho\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

pour $\rho > \rho'$. L'intégrale double, qui entrait dans nos formules, se trouve ainsi réduite à une intégrale simple, et le problème de l'attraction d'un ellipsoïde homogène est résolu. Il serait, au surplus, aisé de faire voir que les formules auxquelles nous sommes arrivés se ramènent à celles dont on fait ordinairement usage.

Excusez-moi si je me livre ici à une courte digression au sujet de la formule

$$\int\int\frac{\cos\alpha' d\omega'}{\Delta}.$$

C'est par une formule de cette espèce que s'exprime, en général, la composante parallèle à une droite fixe de l'attraction exercée par un corps homogène dont la densité est prise pour unité et qui est terminé par une surface quelconque; $d\omega'$ est alors l'élément de la surface dont il s'agit, α' l'angle que la perpendiculaire à $d\omega'$ fait avec la droite fixe, et Δ la distance de l'élément $d\omega'$ au point attiré m. On peut conclure

comme ci-dessus la proposition énoncée en effectuant une intégration dans la formule générale qui donne la composante de l'attraction d'un corps estimée suivant un axe fixe. Mais on y arrive aussi et même on obtient un résultat plus général par la méthode suivante, dont les géomètres ont du reste plusieurs fois fait usage dans les questions de ce genre.

Prenons dans l'espace un point O quelconque, et menons du point O des rayons vecteurs au point attiré m, puis généralement à tous les points de la surface du corps attirant. En agrandissant tous ces rayons vecteurs d'une quantité infiniment petite proportionnelle à leurs grandeurs primitives, de telle sorte que 1 devienne $1+\tau$, on formera un nouveau système semblable au premier. Le potentiel V, qui est une quantité de seconde dimension, augmentera dans le rapport de $1+2\tau$ à l'unité; sa variation sera donc $2\tau V$. Mais on peut la calculer d'une autre manière. En effet, le rayon vecteur r du point attiré m ayant été augmenté de τr, V a dû varier par cette seule raison de $\frac{dV}{dr}\tau r$; d'un autre côté, V s'est augmenté du potentiel de la couche comprise entre l'ancienne surface, limite du corps attirant, et la surface du corps semblable que nous avons introduit. Soit P′ la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan tangent mené par $d\omega'$; dans la figure semblable cette perpendiculaire devient $(1+\tau)P'$; l'épaisseur de la couche dont nous venons de parler est donc $\tau P'$, d'où résulte ce potentiel

$$\tau\int\int\frac{P'\,d\omega'}{\Delta}.$$

En résumé, les deux quantités

$$2\tau V \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dr}\tau r+\tau\int\int\frac{P'\,d\omega'}{\Delta},$$

exprimant toutes deux la variation de V, sont égales entre elles, et l'on a

$$2V = r\frac{dV}{dr}+\int\int\frac{P'\,d\omega'}{\Delta}.$$

En nommant r' le rayon vecteur mené du point O à l'élément $d\omega'$, et α' l'angle que r' fait avec la normale à $d\omega'$, c'est-à-dire avec la perpendiculaire P′, on a

$$P' = r'\cos\alpha'.$$

D'un autre côté, en représentant par F la force attractive exercée sur m dans le sens mO, composante de l'attraction totale, on sait que $F = -\frac{dV}{dr}$. Notre formule devient donc

$$F = \frac{1}{r}\int\int\frac{r'\cos\alpha' d\omega'}{\Delta} - \frac{2V}{r}.$$

Transportons actuellement le point O à l'infini sur le prolongement de la droite actuelle mO, prise comme droite fixe quelconque; les rayons r et r' deviendront infinis ensemble, et leur dernier rapport sera évidemment égal à l'unité; quant au dernier terme du second membre, il s'évanouira. La composante F, suivant la droite fixe indiquée, sera donc exprimée par

$$\int\int\frac{\cos\alpha' d\omega'}{\Delta}.$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu plus haut.

Je vous ai montré, par des exemples simples, l'usage des formules (A), (B), (C) dans les questions relatives à l'attraction. On peut tirer de ces formules des résultats beaucoup plus étendus. J'y reviendrai dans une autre occasion. Il me resterait à présent aussi à développer, sous divers points de vue, pour en bien faire comprendre la nature, les formules (A), (B), (C), la formule (A) surtout. Mais cette lettre est déjà trop longue, et je me vois forcé de remettre ces nouveaux détails à un autre jour. J'espère du moins, monsieur, que vous regarderez les formules (A), (B), (C) comme bien établies par mon analyse, et que vous comprendrez, dès à présent, comment la même méthode a dû me fournir la solution (pour le cas d'un ellipsoïde quelconque) du problème de M. Gauss dont j'ai fait mention à la page 225 du tome X du *Journal de Mathématiques*. Je me suis servi, pour arriver aux formules (A), (B), (C), de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

En formant, avec une seconde équation semblable,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0.$$

la combinaison

$$v\frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2v}{dx^2} + v\frac{d^2u}{dy^2} - u\frac{d^2v}{dy^2} + v\frac{d^2u}{dz^2} - u\frac{d^2v}{dz^2} = 0.$$

puis multipliant par $dxdydz$, et intégrant, en prenant

$$u = \mathrm{RMN}, \quad v = \frac{1}{\Delta},$$

on obtient encore les formules remarquables que voici :

$$(\mathrm{D}) \qquad \mathrm{U} = \frac{4\pi\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}{2n+1}\frac{d\mathrm{R}'}{d\rho'}\,\mathrm{SMN}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

et

$$(\mathrm{E}) \qquad \mathrm{U} = \frac{4\pi\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}{2n+1}\frac{d\mathrm{S}'}{d\rho'}\,\mathrm{RMN}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

où

$$\mathrm{U} = \int\int \frac{\mathrm{M}'\mathrm{N}'\cos\nu'\,d\omega'}{\Delta'}:$$

les notations sont les mêmes que ci-dessus, et de plus ν' désigne l'angle compris entre la perpendiculaire à $d\omega'$, menée extérieurement à l'ellipsoïde (ρ'), et la droite Δ, tirée de cet élément au point (ρ, μ, ν). Vous vérifierez nos formules, dans un cas particulier, en faisant $n = 0$, car on a alors

$$\mathrm{U} = \int\int \frac{\cos\nu'\,d\omega'}{\Delta'},$$

et ces formules donnent

$$\mathrm{U} = 0 \quad \text{pour} \quad \rho > \rho', \quad \text{et} \quad \mathrm{U} = -4\pi \quad \text{pour} \quad \rho < \rho':$$

ce qui est exact, d'après un théorème connu qui a lieu pour toute surface fermée.

Veuillez agréer, monsieur, l'expression de mes sentiments d'estime et d'amitié.

J. Liouville.

Paris, 29 mai 1846.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. J. STEINER,

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

(Extrait du Journal de M. Crelle, t. XII, p. 137, année 1834. — Traduction de M. ARISTIDE MARRE.)

L'énoncé complet d'une proposition que je t'ai communiquée autrefois, est le suivant :

1. « Deux surfaces du deuxième degré, un ellipsoïde et un hyperboloïde à une nappe, étant confocales; en d'autres termes, leurs sections principales ayant les mêmes foyers, si un point quelconque K de l'hyperboloïde est pris pour le sommet d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde, les deux génératrices de l'hyperboloïde, qui passent par ce même point, sont les lignes focales de ce cône. »

Cette proposition est loin de me paraître sans importance, elle est susceptible encore de plus de généralité, et l'on peut lui joindre une proposition réciproque. Elle conduit à de nombreuses conséquences dans certains cas intéressants. Par exemple, en voici un corollaire :

2. « Les cônes circonscrits à une série de surfaces confocales du deuxième degré, et ayant leurs sommets en un même point quelconque K, ont les mêmes lignes focales et les mêmes axes. »

Un cas que je veux particulièrement mentionner s'énonce ainsi :

3. « Si un point K du plan de l'hyperbole h [qui, d'après ton théorème, est le lieu des sommets de tous les cônes droits que l'on peut circonscrire à un ellipsoïde (*)] est pris pour le sommet d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde E, les tangentes à l'hyperbole h, issues du point K, sont les lignes focales du cône. Si le point K est situé sur l'hyperbole h, alors les tangentes se réunissent en *une seule*, les lignes focales se confondent, et le cône devient *droit;* » c'est là ton théorème.

La proposition inverse ou réciproque s'énonce :

« Étant donnés une surface quelconque du deuxième degré, F, et

(*) Journal de M. Crelle, tome I, page 47.

» un point quelconque, M, il existe, en général, une série de cônes » droits (du second degré), dont les sommets sont en M, et qui » coupent la surface F suivant des courbes planes (sections coniques). » les plans de toutes ces courbes se rencontrent mutuellement en un » point N, et enveloppent une surface conique quelconque du » second degré (N). Si par le point N on mène un plan à vo- » lonté, qui coupe la surface F suivant une conique k, et le cône (N) » suivant deux arêtes a, b, alors le cône (Mk) qui passe par k, et dont » le sommet est en M, a pour plans cycliques les plans (Ma), (Mb), » déterminés par le point M et par les arêtes a, b, c'est-à-dire que » tout autre plan parallèle à l'un de ces deux-là coupe le cône (Mk) » suivant un cercle. »

On déduit aisément du théorème d'Ivory sur les surfaces du second degré dont les sections principales sont confocales, le théorème que tu as autrefois trouvé dans tes recherches sur les contacts des sphères, et qui plus tard entra dans le domaine public, grâce aux mathématiciens français, c'est-à-dire la proposition qui suit :

4. « Si deux sections coniques (ellipse et hyperbole), situées dans » deux plans perpendiculaires entre eux, sont telles que chacune » d'elles ait pour sommets les foyers de l'autre, l'une quelconque de » ces courbes sera le lieu des sommets de tous les cônes droits qui » auront l'autre courbe pour base; et tout couple de points appar- » tenant à l'une de ces courbes sera un système de foyers (dans l'es- » pace) de l'autre; c'est-à-dire que si l'on prend sur l'hyperbole deux » points quelconques, la *somme* ou la *différence* de leurs distances à » chaque point de l'ellipse, selon qu'ils sont situés sur les deux bran- » ches ou sur une seule, a une valeur constante, et réciproquement : » deux points de l'ellipse jouissent de cette propriété, que la différence » de leurs distances à chaque point de l'hyperbole est constante, etc. »

Du théorème d'Ivory dérivent encore d'autres propositions sur la génération des surfaces et des lignes du deuxième degré, qui sont respectivement analogues, et qui renferment en elles-mêmes, sous un rapport, comme cas particuliers, les propriétés des foyers; telles sont les propositions suivantes :

5. « Etant pris dans l'espace trois points fixes quelconques a, b, c,

» et trois autres points quelconques A, B, C, qui correspondent aux » premiers, si l'on conçoit, par rapport à ces points fondamentaux, » deux séries de points x, X, tels que leurs distances aux points res- » pectifs de chacun des deux systèmes soient égales, c'est-à-dire tels » que $xa = \mathrm{XA}$, $xb = \mathrm{XB}$, $xc = \mathrm{XC}$, alors on a un système de cor- » rélation, dans lequel le point X décrit une surface quelconque du » deuxième degré, quand le point x se meut sur un plan, et récipro- » quement. »

6. « Étant pris dans deux plans différents (ou bien dans un seul » deux couples (a et b), (A et B) de points fixes ou principaux, si de » plus les autres points de ces plans sont tels que, pour chaque cou- » ple (x et X) de points correspondants, les distances aux points fixes » soient respectivement égales, ainsi $ax = \mathrm{AX}$ et $bx = \mathrm{BX}$: alors on » a un système de relation, dans lequel, à toute droite située sur un » plan correspond une section conique dans l'autre; en d'autres » termes, si le point x, par exemple, se meut suivant une droite » quelconque g, le point correspondant X décrit une section co- » nique G. »

Ces théorèmes (**5** et **6**) me paraissent donner lieu à de nombreuses recherches que je n'entreprendrai pourtant point en ce moment. Ainsi, une discussion approfondie du dernier théorème (**6**) donne tout d'abord les résultats suivants :

7. « Si le point x décrit l'axe fondamental ab lui-même, le point X » a pour lieu une section conique qui a pour foyers les points fixes » A et B, et dont le grand axe est égal à la droite ab; ce qui est le » théorème bien connu sur les foyers de la section conique. »

« L'un des deux axes de la section conique G, qui correspond à » une droite g, prise à volonté (**6**), est couché sur l'axe fondamental » AB. »

« Concevons, dans le premier plan, la conique k correspondante à » l'axe principal AB, et qui a, par conséquent, pour foyers les points » fixes a et b. Si la droite AB est plus grande que ab, alors k est une » ellipse, et à la droite g correspond une hyperbole G, dont le *pre-* » *mier* ou le *second* axe est couché sur l'axe fondamental AB, selon » que la droite g *coupe* ou ne *coupe pas* la section conique k; si elle

» la touche, alors la section conique G consiste en deux droites qui » se croisent en un point quelconque de l'axe AB, et lui sont égale- » ment inclinées; si $2(ab)^2 > (AB)^2$, il existe deux directions détermi- » nées pour la droite g, auquel cas les hyperboles *équilatères* G lui » correspondent; les asymptotes de toutes ces hyperboles équilatères » sont parallèles entre elles, ou ces hyperboles ont deux points com- » muns situés à l'infini. Si l'axe AB est plus petit que ab, alors k est » une hyperbole, et à la droite g correspond une *ellipse* G ou une *hy-* » *perbole* G, selon que la droite g', tirée parallèlement à g par le cen- » tre de l'hyperbole k, est située dans l'angle *intérieur* ou *extérieur* » des asymptotes de cette hyperbole; si g offre le cas singulier du paral- » lélisme avec une asymptote de l'hyperbole k, alors G est une para- » bole. Il existe aussi deux directions déterminées de la droite g, pour » lesquelles lui correspond toujours une hyperbole équilatère G; si » g est perpendiculaire à l'axe ab, alors elle a toujours pour corres- » pondante une droite G (ou proprement un système de deux droites » qui coïncident) qui sera à angle droit sur l'axe AB, etc. Si, au lieu » d'être une droite, g est une courbe du degré n, alors il lui corres- » pond une courbe G du degré $2n$, etc. »

De semblables résultats se déduisent du premier théorème (5). Il existe une proposition analogue à la précédente (6), pour un faisceau de rayons dans l'espace, ou sur la sphère, et même, d'après le principe de la réciprocité, elle a lieu en une double forme. Au reste, on peut encore produire de cette manière d'autres systèmes de relation si, au lieu des conditions simples ci-dessus mentionnées (5 et 6), on en admet de différentes.

Le théorème d'Ivory fait voir, en outre, que la courbe à double courbure, suivant laquelle se coupent deux surfaces du deuxième degré, peut aussi avoir des foyers (dans l'espace), et qu'ainsi il existe, pour chaque courbe à double courbure de l'ellipsoïde, deux points fixes déterminés, et faciles à construire d'après cette propriété, que la somme de leurs distances à chaque point de la courbe est constante. C'est sur ce principe que se fonde une génération organique facile de la courbe à double courbure, etc.

REMARQUE

SUR UN POINT FONDAMENTAL

DE LA *MÉCANIQUE ANALYTIQUE* DE LAGRANGE;

PAR M. POINSOT.

1. On sait que Lagrange, dans ce livre célèbre qu'il a intitulé *Mécanique analytique*, a eu pour objet de réduire la mécanique à des formules générales, toutes tirées du seul *principe des vitesses virtuelles*, ou plutôt de la formule différentielle qui est l'expression de ce principe. Pour la perfection même de son ouvrage, l'auteur a soin de n'employer, dans aucune des questions qu'il traite, ni figures, ni aucun raisonnement tiré de considérations géométriques ou mécaniques; tout se fait par le calcul et de simples changements de coordonnées : et ce n'est même que sous une forme purement analytique qu'on y voit présentée la question si naturelle et si simple de la composition des forces appliquées sur un point.

« Si des forces quelconques P, Q, R,..., dirigées suivant les lignes » p, q, r,..., agissent sur un même point, et qu'on veuille réduire » toutes ces forces à trois autres Ξ, Π, Σ, dirigées suivant les lignes » ξ, π, σ, il n'y aura, dit l'auteur, qu'à considérer l'équilibre des » forces P, Q, R,... et Ξ, Π, Σ, appliquées à ce même point, et di- » rigées respectivement suivant les lignes p, q, r,..., $-\xi$, $-\pi$, $-\sigma$, » et former, en conséquence, l'équation

$$\mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \ldots - \Xi d\xi - \Pi d\pi - \Sigma d\sigma = 0.$$

» laquelle doit être vraie de quelque manière qu'on fasse varier la

» position du point de concours de toutes les forces. Or, quelles que » soient les lignes ξ, π, σ, il est clair que, pourvu qu'elles ne soient » pas toutes dans un même plan, elles suffisent pour déterminer la » position de ce point; par conséquent, on pourra toujours exprimer » les lignes p, q, r,... par des fonctions de ξ, π, σ, et l'équation pré- » cédente devra avoir lieu par rapport aux variations de ces trois » quantités en particulier; d'où il s'ensuit qu'on aura

$$\Xi = P\frac{dp}{d\xi} + Q\frac{dq}{d\xi} + R\frac{dr}{d\xi} + \ldots,$$

$$\Pi = P\frac{dp}{d\pi} + Q\frac{dq}{d\pi} + R\frac{dr}{d\pi} + \ldots,$$

$$\Sigma = P\frac{dp}{d\sigma} + Q\frac{dq}{d\sigma} + R\frac{dr}{d\sigma} + \ldots. \text{ »}$$

(*Voyez* la *Mécanique analytique*, 1re édition, page 62, ou 2e édition, page 111.)

Telles sont les formules données par Lagrange pour réduire des forces P, Q, R,..., appliquées sur un même point et dirigées suivant des lignes p, q, r,..., à trois autres forces Ξ, Π, Σ, dirigées suivant trois lignes quelconques données ξ, π, σ; expressions d'ailleurs toutes semblables à celles qu'on aurait pour transformer un système quelconque de forces qui agissent sur différents points liés entre eux, comme on voudra, en un autre système équivalent de forces Ξ, Π, Σ,..., qui seraient appliquées aux mêmes points suivant d'autres directions ξ, π, σ,.... (*Voyez* 2e édition, 1re partie, section II, page 43.)

2. Mais il y a, sur ce point de doctrine, une remarque essentielle à faire, et qui paraît avoir échappé à l'auteur de la *Mécanique analytique*. C'est que les formules dont il s'agit ne conviennent point, comme on pourrait le croire, à toute espèce de lignes ou coordonnées ξ, π, σ,..., bien que ces lignes soient propres à déterminer les lieux des corps. Les formules ne sont bonnes qu'autant que ces lignes nouvelles seront (comme les premières p, q, r,...) les distances de ces corps, soit à des *centres fixes*, soit à des *plans fixes*, comme il arrive dans le cas des coordonnées ordinaires x, y, z, lesquelles marquent les distances du point que l'on considère à trois plans fixes *rectangulaires entre eux*:

et, en général, on peut dire que, pour l'exactitude de ces formules, il faut que les lignes ξ, π, σ,... soient de telle nature, que leurs différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$,... expriment les *vitesses virtuelles mêmes* du point d'application des forces Ξ, Π, Σ,... : c'est-à-dire que chacune d'elles, $d\xi$, soit la projection *orthogonale*, sur la direction de la force Ξ, du déplacement quelconque infiniment petit qu'on suppose donné à ce point dans l'espace : sans quoi toutes ces transformations analytiques, quoique exactes en pure analyse, seront en défaut dans la mécanique, et conduiront à de fausses conséquences.

3. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un seul point tiré par des forces quelconques P, Q, R,..., dirigées suivant les lignes ou rayons vecteurs p, q, r,..., et qu'on veuille réduire ces forces à trois autres Ξ, Π, Σ, suivant les trois coordonnées ξ, π, σ, parallèles à trois axes fixes *obliques* entre eux : il semble, d'après l'auteur, qu'on aurait pour les forces cherchées

$$\Xi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\xi} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\xi} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\xi} + \ldots,$$

$$\Pi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\pi} + \mathrm{Q}\frac{db}{d\pi} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\pi} + \ldots,$$

$$\Sigma = \mathrm{P}\frac{dp}{d\sigma} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\sigma} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\sigma} + \ldots,$$

ce qui n'est pas vrai, car on peut prouver que la résultante des forces P, Q, R,... n'est pas la même que celle des trois forces Ξ, Π, Σ, déterminées par ces équations.

Soit, en effet, $f(p, q, r,\ldots)$ une fonction quelconque des rayons vecteurs p, q, r,...; et désignons par $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$,... les *fonctions primes* de cette fonction prises relativement aux lignes p, q, r,.... J'ai démontré que des forces P, Q, R,..., proportionnelles à ces *fonctions primes* et dirigées suivant les lignes respectives p, q, r,.... ont une résultante perpendiculaire à la surface courbe qui serait donnée par l'équation

$$f(p, q, r,\ldots) = \text{constante},$$

en y regardant p, q, r,... comme variables.

Or supposons maintenant trois axes obliques, non situés dans le même plan, et soient ξ, π, σ les trois coordonnées du point d'application des forces par rapport à ces axes : on pourra toujours exprimer les lignes p, q, r,... par les trois coordonnées ξ, π, σ ; et si l'on met ces expressions au lieu de p, q, r,... dans la fonction $f(p, q, r,...)$, on aura

$$f(p, q, r,...) = \varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{constante},$$

d'où l'on tire, en différentiant successivement par rapport à ξ, π, σ,

$$f'(p)\frac{dp}{d\xi} + f'(q)\frac{dq}{d\xi} + f'(r)\frac{dr}{d\xi} + ... = \varphi'(\xi),$$

$$f'(p)\frac{dp}{d\pi} + f'(q)\frac{dq}{d\pi} + f'(r)\frac{dr}{d\pi} + ... = \varphi'(\pi),$$

$$f'(p)\frac{dp}{d\sigma} + f'(q)\frac{dq}{d\sigma} + f'(r)\frac{dr}{d\sigma} + ... = \varphi'(\sigma).$$

Donc, suivant les formules de l'auteur, les trois forces Ξ, Π, Σ, auxquelles les forces $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$,... se trouveraient réduites, seraient exprimées par

$$\Xi = \varphi'(\xi), \quad \Pi = \varphi'(\pi), \quad \Sigma = \varphi'(\sigma).$$

Ainsi il faudrait que $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ représentassent trois forces dont la résultante fût la même que celle des proposées $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$,..., et par conséquent fût perpendiculaire à la surface donnée par l'équation

$$f(p, q, r,...) = \text{constante}.$$

Or cette surface est la même que celle qui serait donnée par l'équation

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{constante},$$

entre les coordonnées obliques ξ, π, σ. Donc, en considérant la surface représentée par l'équation

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{constante},$$

entre les trois coordonnées ξ, π, σ, relatives à trois axes obliques, on pourrait dire que trois forces dirigées suivant ces coordonnées et proportionnelles aux trois fonctions *primes* $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ donnent

une résultante perpendiculaire à la surface dont il s'agit, ou se font équilibre sur cette surface : ce qui est faux, comme on peut s'en assurer immédiatement par le principe même des vitesses virtuelles.

Et, en effet, pour l'équilibre du point auquel les trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ sont appliquées, il faudrait que la somme des *moments virtuels* de ces forces fût nulle pour tout déplacement infiniment petit ds qu'on voudrait donner à ce point sur la surface. Si donc on désigne par $\delta\xi$, $\delta\pi$, $\delta\sigma$ les trois projections orthogonales de ds sur les trois axes obliques de ξ, π, σ, il faudrait, pour l'équilibre, qu'on eût toujours l'équation

$$\varphi'(\xi)\,\delta\xi + \varphi'(\pi)\,\delta\pi + \varphi'(\sigma)\,\delta\sigma = 0;$$

ou bien, comme ds est la diagonale d'un rhomboïde dont les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ sont les arêtes, et que les trois projections de ds sur les directions de ces arêtes sont exprimées par

$$\begin{aligned}\delta\xi &= d\xi + \lambda\,d\pi + \mu\,d\sigma,\\ \delta\pi &= d\pi + \nu\,d\sigma + \lambda\,d\xi,\\ \delta\sigma &= d\sigma + \mu\,d\xi + \nu\,d\pi,\end{aligned}$$

(λ, μ, ν étant les cosinus des angles $\widehat{\xi\pi}$, $\widehat{\xi\sigma}$, $\widehat{\pi\sigma}$ que les axes forment entre eux), il faudrait que, en mettant, au lieu de $\delta\xi$, $\delta\pi$, $\delta\sigma$, ces valeurs, on eût toujours, entre les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$, l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&[\varphi'(\xi) + \lambda\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\sigma)]\,d\xi + [\varphi'(\pi) + \nu\varphi'(\sigma) + \lambda\varphi'(\xi)]\,d\pi\\ &\qquad + [\varphi'(\sigma) + \mu\varphi'(\xi) + \nu\varphi'(\pi)]\,d\sigma = 0.\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, le point mobile restant toujours sur la surface, il faudrait qu'on eût en même temps l'équation

$$(2)\qquad \varphi'(\xi)\,d\xi + \varphi'(\pi)\,d\pi + \varphi'(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Or il est clair que ces équations (1) et (2) ne peuvent subsister ensemble à moins que les coefficients de $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ dans l'une d'elles ne soient proportionnels aux coefficients des mêmes indéterminées dans l'autre, et par conséquent, à moins qu'on n'ait les deux équations

$$\begin{aligned}\varphi'(\xi)[\nu\varphi'(\sigma) + \lambda\varphi'(\xi)] - \varphi'(\pi)[\lambda\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\sigma)] &= 0,\\ \varphi'(\xi)[\nu\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\xi)] - \varphi'(\sigma)[\lambda\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\sigma)] &= 0,\end{aligned}$$

équations qui ne peuvent avoir lieu en général, c'est-à-dire indépendamment des variables ξ, π, σ, et, par conséquent, de la position du point sur la surface que l'on considère.

Ainsi le point mobile, aux coordonnées quelconques ξ, π, σ, ne peut être tenu en équilibre sur la surface par les trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$: la résultante de ces forces n'est donc pas normale à cette surface, et, par conséquent, elle n'est pas la même que celle des forces proposées $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, etc. : *ce qu'il fallait démontrer.*

4. Les formules de Lagrange pour la réduction des forces sont donc en défaut dans cette hypothèse de coordonnées obliques ξ, π, σ; il n'y a qu'un cas singulier où l'erreur pourrait s'évanouir : c'est le cas où les coordonnées ξ, π, σ satisferaient aux deux équations précédentes, en même temps qu'à l'équation de la surface

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{constante},$$

ce qui ne répond, comme on voit, qu'à un certain point de cette surface, ou à une certaine proportion déterminée entre les trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$. Mais, dans ce cas singulier même, si la résultante des trois forces Ξ, Π, Σ a la même direction que la résultante des forces proposées $f'(p)$, $f'(q)$, etc., on trouverait qu'elle n'a pas la même grandeur : de sorte qu'il y aurait encore erreur de ce côté.

Lorsque les cosinus λ, μ, ν sont tous trois *nuls*, les deux conditions précédentes ont toujours lieu d'elles-mêmes, et les formules de Lagrange sont toujours exactes. C'est le cas des coordonnées ξ, π, σ, relatives à trois axes *rectangulaires* entre eux. Et, en effet, pour de telles coordonnées, les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ sont les expressions mêmes des vitesses virtuelles du point décrivant estimées suivant ces lignes, et l'équation différentielle

$$\varphi'(\xi)\,d\xi + \varphi'(\pi)\,d\pi + \varphi'(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

tirée de l'équation de la surface, exprime l'égalité à zéro de la somme des moments virtuels des trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$, et, par conséquent, l'équilibre de ces forces sur le point qu'on suppose assujetti à décrire cette surface.

Mais, dans toute autre hypothèse que celle de λ, μ, ν tous les trois

nuls, les deux conditions ne peuvent être remplies indépendamment de ξ, π, σ; et les formules sont toujours fautives.

5. Soit, par exemple, le cas très-simple d'un point posé sur la circonférence d'un cercle fixe. Si l'on prend l'équation de ce cercle en coordonnées rectangles x et y, on aura

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \text{constante},$$

d'où

$$f'(x)dx + f'(y)dy = 2x.dx + 2y.dy = 0,$$

et l'on pourra très-bien dire ici que deux forces X et Y étant prises le long des coordonnées, dans le rapport des fonctions *primes* $f'(x)$, $f'(y)$, donnent leur résultante perpendiculaire à la circonférence du cercle, et tiennent ainsi le point d'application en équilibre sur cette circonférence.

Mais si, au lieu de ces coordonnées rectangles x et y, on en prend deux autres ξ et π de même origine, et par exemple l'une, ξ, suivant les x, l'autre, π, inclinée d'un angle α sur la première, ce qui donnera

$$x = \xi + \pi \cos \alpha, \quad y = \pi \sin \alpha,$$

on aura, en substituant,

$$f(x, y) = \varphi(\xi, \pi) = \pi^2 + \xi^2 + 2\pi\xi \cos \alpha = \text{constante};$$

d'où

$$\varphi'(\xi)d\xi + \varphi'(\pi)d\pi = 2(\xi + \pi \cos\alpha)d\xi + 2(\pi + \xi \cos\alpha)d\pi = 0.$$

Or il est évident que deux forces proportionnelles à $\varphi'(\xi)$ et $\varphi'(\pi)$, c'est-à-dire, ici, à $(\xi + \pi \cos\alpha)$ et $(\pi + \xi \cos\alpha)$, ne donnent point leur résultante perpendiculaire à la circonférence du cercle dont il s'agit: car il faudrait pour cela que cette résultante allât passer par le centre et que, par conséquent, ses deux composantes, le long de ξ et π, fussent simplement proportionnelles à ξ et π, et non pas à $(\xi + \pi \cos\alpha)$ et $(\pi + \xi \cos\alpha)$.

Donc, quoiqu'on ait ici [en faisant $\varphi'(\xi) = \Xi$, $\varphi'(\pi) = \Pi$] les équations

$$\Xi = X\frac{dx}{d\xi} + Y\frac{dy}{d\xi}, \quad \Pi = X\frac{dx}{d\pi} + Y\frac{dy}{d\pi},$$

on ne peut pas dire que les deux forces X et Y, dirigées suivant les axes rectangles x et y, soient réductibles aux deux forces Ξ et Π, dirigées suivant les axes obliques ξ et π.

Pour que l'on eût

$$\xi + \pi \cos\alpha : \pi + \xi \cos\alpha :: \xi : \pi,$$

il faudrait que l'on eût

$$\cos\alpha = 0;$$

ce qui est le cas des coordonnées ξ et π rectangulaires entre elles.

Ou bien, il faudrait $\xi = \pi$; ce qui ne serait qu'un cas particulier de la position du point proposé M sur la circonférence du cercle dont l'équation est

$$\varphi(\xi, \pi) = \text{constante}.$$

Mais, dans ce cas singulier même, où la résultante des deux forces Ξ et Π aurait la même direction que celle des deux forces X et Y, on trouverait que ces deux résultantes,

$$\sqrt{\Xi^2 + 2\Xi\Pi\cos\alpha + \Pi^2}, \quad \text{et} \quad \sqrt{X^2 + Y^2},$$

n'ont pas la même valeur; et que la première est à la seconde comme $1 + \cos\alpha$ est à l'unité.

Ainsi, tant que $\cos\alpha$ n'est pas nul, ou, ce qui est la même chose, tant que les coordonnées ξ et π seront obliques, les forces proposées X et Y ne seront jamais réductibles aux deux forces Ξ et Π données par les formules de Lagrange.

6. Dans l'analyse qui précède, j'ai pris simplement, pour représenter les forces P, Q, R,... qu'il s'agissait de réduire à d'autres, les fonctions *primes* d'une même fonction quelconque $f(p, q, r, \ldots)$ des rayons vecteurs $p, q, r, \ldots$ suivant lesquels ces forces sont dirigées : ce n'est qu'une manière de reconnaître tout d'un coup la direction de la résultante par la direction de la *normale* à la surface courbe qu'on aurait en posant l'équation

$$f(p, q, r, \ldots) = \text{constante}.$$

Mais, comme on pourrait croire que cette hypothèse a quelque chose

qui restreint notre démonstration au cas de certaines forces, il est bon de remarquer qu'elle convient à des forces P, Q, R,... données comme on voudra. Et, en effet, quelle que soit la fonction f que l'on ait choisie, comme on est le maître de placer les centres des forces partout où l'on veut sur leurs directions p, q, r,..., on peut toujours donner à ces lignes des longueurs qui rendent

$$f'(p) = \mathrm{P}, \quad f'(q) = \mathrm{Q}, \quad f'(r) = \mathrm{R}.....$$

Au reste, il est évident que si l'on propose des forces de grandeurs quelconques A, B, C,..., on peut toujours les regarder comme étant les fonctions *primes* de la fonction linéaire

$$\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r + \ldots$$

prises relativement aux lignes p, q, r,... suivant lesquelles ces forces sont supposées dirigées. Ainsi notre hypothèse est toujours permise et notre démonstration a toute la généralité désirable.

7. On voit donc que, dans la mécanique analytique, qui est uniquement fondée sur le principe des vitesses virtuelles, les seules coordonnées qu'il soit permis d'employer doivent être de telle nature, que leurs différentielles représentent, sur ces coordonnées, les projections *droites* de la petite ligne que le point d'application des forces est supposé avoir décrite dans l'espace. C'est ce qui a lieu pour les coordonnées p, q, r,..., x, y, z, dont nous avons parlé, et encore pour celles qui consistent dans un rayon vecteur ρ, avec deux angles ou arcs de cercle φ, ψ, perpendiculaires à ce rayon; etc. Mais il faut exclure toutes les coordonnées ξ, π, σ, qui ne jouiraient pas de la même propriété. Ainsi, il n'est pas exact de dire que, dans cette méthode analytique, *rien n'oblige à se servir de coordonnées rectangles, plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps*, etc. (*Mécanique analytique*, 1re édition, page 23, ou 2e édition, page 38); et l'on doit même remarquer, à ce sujet, que le principe des vitesses virtuelles ne donne pas une méthode aussi générale qu'on paraît le croire.

Et, par exemple, dans le cas de plusieurs forces P, Q, R, S, etc.,

en équilibre sur un point, le principe des vitesses virtuelles dit simplement que les forces étant projetées *perpendiculairement* sur une droite quelconque menée par ce point, doivent faire une somme nulle. Car, en nommant du la ligne quelconque qui marque le déplacement du point d'application dans l'espace, les lignes dp, dq, dr, etc., ne sont autre chose que les projections droites de du sur les lignes p, q, r, etc., qui marquent les directions des forces P, Q, R, etc. En nommant donc i, i', i'', etc., les inclinaisons de ces forces sur la ligne du, on a

$$dp = du.\cos i, \quad dq = du\cos i', \quad dr = du\cos i'', \ldots,$$

et l'équation des vitesses virtuelles

$$\mathrm{P}dp - \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr - \ldots = 0$$

devient, en divisant tout par le facteur commun du,

$$\mathrm{P}\cos i + \mathrm{Q}\cos i' + \mathrm{R}\cos i'' + \ldots = 0;$$

ce qui signifie que les forces projetées à angle droit sur un axe quelconque doivent faire une somme nulle dans le cas de l'équilibre. Mais le principe de la composition des forces dit plus généralement, que les forces étant projetées sur un axe quelconque par des lignes parallèles à un même plan incliné comme on voudra sur cet axe, la somme de toutes ces projections obliques doit être nulle. Ce n'est pas qu'on ne puisse aisément démontrer cette seconde proposition par la première, mais l'expression du second principe est évidemment plus générale que celle du principe des *vitesses virtuelles*.

De même, on peut remarquer que les équations de l'équilibre d'un système solide ne sont démontrées, dans la *Mécanique analytique*, que par rapport à trois axes *rectangulaires* entre eux; et pourtant, comme je l'ai fait voir dans ma *Statique*, des équations toutes semblables ont lieu par rapport à trois axes *obliques* quelconques. Le principe des vitesses virtuelles n'est donc pas, dans ce nouvel exemple, aussi général que le principe de la *composition des forces*. Il n'est pas même aussi direct; car, s'il mène aux trois premières équations en employant les coordonnées rectangles x, y, z, il ne peut plus donner les trois dernières équations que par un changement de ces coordonnées en d'autres d'une espèce différente, et dont le choix paraît arbitraire, ou

ne semble fait que pour obtenir des équations d'équilibre que l'on connaissait d'avance.

Au reste, quoique Lagrange nous laisse entendre que dans sa méthode on peut employer toute espèce de coordonnées, pourvu qu'elles soient propres à déterminer les lieux des corps, il est fort remarquable que ce géomètre n'en ait jamais employé d'autres que celles qui conviennent réellement au principe des vitesses virtuelles : du moins je n'en connais pas d'exemple, et je crois même qu'on n'en trouverait point dans ses écrits. Car si, pour la solution de quelque problème, il avait essayé l'emploi de certaines coordonnées non permises dans sa méthode, il est très-probable que, par l'erreur sensible de quelque résultat, il eût été averti du défaut de ses formules; et alors il n'aurait pas manqué de faire lui-même, à ce sujet, une remarque expresse, au moins dans la seconde édition de son bel ouvrage.

8. Quoi qu'il en soit, tout aurait pu se corriger d'une manière très-simple, et qu'il me paraît bon d'indiquer avant de terminer cette Note, parce qu'on y voit sur-le-champ ce qui cause l'erreur, et, de plus, ce qu'il faudrait faire pour l'éviter, sans exclure l'emploi de ces coordonnées qui y donnent lieu.

Et, en effet, quelle que soit la nature de ces coordonnées ξ, π, σ,..., dans lesquelles on veuille transformer les lignes ou rayons vecteurs p, q, r,..., il est certain qu'on peut toujours, avec Lagrange, poser l'équation parfaitement exacte

$$\mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \ldots = \Xi d\xi + \Pi d\pi + \Sigma d\sigma + \ldots,$$

où Ξ, Π, Σ,... ont les valeurs exprimées par les équations du n° **1**.

Or, maintenant j'observe que, dans le premier membre, les différentielles dp, dq, dr,... marquent bien les vitesses virtuelles du point d'application des forces suivant les lignes p, q, r,..., et qu'ainsi chaque terme $\mathrm{P}dp$ est le *moment virtuel* de la force P. Si, dans le second membre, les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$,... ont la même propriété, c'est-à-dire si chacune $d\xi$ marque la vitesse virtuelle du point suivant ξ, chaque terme $\Xi d\xi$ sera aussi le moment virtuel d'une force représentée par Ξ; et alors, de cette équation, qui présente deux sommes de moments virtuels, toujours égales de part et d'autre, on peut très-bien

conclure que le système des forces Ξ, Π, Σ,.... est capable de remplacer le système des forces proposées P, Q, R,....

Mais si les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$,... n'ont pas la propriété dont il s'agit, chaque terme $\Xi d\xi$ ne sera pas le moment virtuel d'une force telle que Ξ, et, d'après le principe même des vitesses virtuelles, on ne pourra pas conclure, comme ci-dessus, que l'ensemble des forces Ξ, Π, Σ,... soit équivalent à l'ensemble des forces proposées. C'est là précisément qu'on tomberait dans cette erreur singulière de tirer d'un principe vrai et d'une équation exacte, une conséquence fausse, parce qu'on aurait oublié d'observer que cette équation n'est pas actuellement sous une forme qui convienne à l'expression du principe. Et, en même temps, c'est là qu'on voit le moyen d'éviter cette erreur sans changer les coordonnées ξ, π, σ,... qui pourraient y donner lieu.

Car, si l'on voulait avoir les vraies forces Ξ', Π', Σ',..., qui, dirigées suivant les coordonnées ξ, π, σ,..., sont capables de remplacer les forces P, Q, R, S,..., il faudrait commencer par mettre dans l'équation, au lieu des différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$,..., leurs valeurs en fonction des vitesses virtuelles mêmes, que je désignerai, comme au n° **3**, par $\delta\xi$, $\delta\pi$, $\delta\sigma$,...; ensuite, rassembler en un seul terme tous ceux qui seraient affectés de $\delta\xi$, de même en un seul tous les termes affectés de $\delta\pi$,...; et alors, notre même équation étant mise sous la forme nouvelle

$$P\,dp + Q\,dz + R\,dr + \ldots = \Xi'\delta\xi + \Pi'\delta\pi + \Sigma'\delta\sigma + \ldots,$$

on pourrait rigoureusement conclure que l'ensemble des forces Ξ', Π', Σ',... équivaut parfaitement à l'ensemble des forces P, Q, R,... puisque la somme des moments virtuels est toujours égale de part et d'autre.

9. Si l'on veut faire ce calcul pour le cas des coordonnées ξ, π, σ parallèles à trois axes obliques, on trouvera, en conservant les dénominations du n° **3**, les valeurs suivantes :

$$\Xi' = \frac{\Xi(1-\nu^2) + \Pi(\mu\nu-\lambda) + \Sigma(\lambda\nu-\mu)}{1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu},$$

$$\Pi' = \frac{\Pi(1-\mu^2) + \Sigma(\lambda\mu-\nu) + \Xi(\mu\nu-\lambda)}{1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu},$$

$$\Sigma' = \frac{\Sigma(1-\nu^2) + \Xi(\lambda\mu-\nu) + \Pi(\lambda\nu-\mu)}{1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu},$$

valeurs qui ne sont pas, comme on voit, les mêmes que celles de Ξ, Π, Σ, et qui n'y pourraient revenir que dans le cas des cosinus λ, μ, ν, tous trois nuls, c'est-à-dire dans le cas de trois axes rectangulaires entre eux : ce qui éclaire et confirme notre précédente analyse.

10. On voit aussi, par ces mêmes expressions, que les équations

$$\Xi' = 0, \quad \Pi' = 0, \quad \Sigma' = 0$$

entraînent les suivantes :

$$\Xi = 0, \quad \Pi = 0, \quad \Sigma = 0,$$

et réciproquement. Si donc on ne demandait que les conditions de l'équilibre entre les forces P, Q, R,..., on pourrait, sans avoir d'erreur à craindre, se contenter de poser les trois équations

$$0 = \Xi = P\frac{dp}{d\xi} + Q\frac{dq}{d\xi} + \ldots,$$

$$0 = \Pi = P\frac{dp}{d\pi} + Q\frac{dq}{d\pi} + \ldots,$$

$$0 = \Sigma = P\frac{dp}{d\sigma} + Q\frac{dq}{d\sigma} + \ldots.$$

Mais si les forces P, Q, R,... n'étant point en équilibre entre elles, on demande de les réduire à d'autres dirigées suivant ξ, π, σ, il faudra nécessairement prendre pour les forces équivalentes, non pas Ξ, Π, Σ, mais bien les valeurs de Ξ', Π', Σ'.

Et ce que je viens de dire s'applique sans difficulté à un système quelconque de puissances qui agissent sur différents points liés entre eux comme on voudra. Ainsi les équations de l'équilibre, données par Lagrange (page 39 de la deuxième édition, art. 12 et suiv.), sont toujours bonnes; mais les formules données, à la fin de l'art. 15, pour l'équivalence de deux systèmes de forces, ne sont exactes que dans le cas de certaines coordonnées; etc., etc.

Nous aurions encore plusieurs choses à dire sur ce point de doctrine : mais cette discussion est déjà longue, et nous pourrions d'ailleurs, s'il était nécessaire, y revenir dans une autre occasion.

NOTE

Sur l'emploi d'un symbole susceptible d'être introduit dans les éléments du calcul différentiel;

PAR M. ERNEST LAMARLE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

Lorsqu'on écrit

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h), \tag{1}$$

on se borne, en général, à faire observer que θ désigne une quantité comprise entre 0 et 1. On sait cependant que les premières notions de l'analyse algébrique permettent de fixer d'une manière extrêmement simple et tout à fait précise le sens de l'équation (1). Ajoutons qu'en l'écrivant sous la forme que nous venons d'indiquer, on est forcé d'en restreindre l'application aux cas où la fonction et sa dérivée demeurent continues dans l'intervalle que l'on considère.

Cette remarque suffira sans doute pour justifier la préférence que nous accordons à la formule suivante :

$$f(x+h)-f(x)=h\mathfrak{M}_x^{x+h}f'(x), \tag{2}$$

où la caractéristique $\mathfrak{M}$ se trouve définie par l'équation de condition

$$\mathfrak{M}_x^{x+h}f'(x)=\lim\left[\frac{f'\left(x+\frac{h}{n}\right)+f'\left(x+2\frac{h}{n}\right)+f'\left(x+3\frac{h}{n}\right)+\ldots+f'(x+h)}{n=\infty}\right],$$

et qui peut s'énoncer en ces termes : « Dans tout intervalle *où la fonction demeure continue*, son accroissement a pour mesure l'accroissement de la variable, multiplié par la *valeur moyenne* de la fonction dérivée. »

En admettant cette notation essentiellement élémentaire et parfaitement indépendante de toute notion de calcul intégral, on remarquera qu'elle offre plusieurs avantages :

1°. Elle donne un sens précis à l'équation (2), et la laisse subsister sous la condition unique que la fonction ne cesse pas d'être continue entre les limites fixées par les indices [*];

2°. Elle est utile, soit par les ressources qu'elles fournit pour certaines applications du calcul différentiel, soit comme transition au calcul intégral dont elle sert à éclaircir les principes fondamentaux.

Montrons par quelques exemples l'usage qu'on peut faire du nouveau symbole.

I. — *Reste de la série de Taylor.*

Soit $f(x)$ une fonction quelconque supposée continue, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, pour toute valeur de x comprise entre a et $a+h$. Si, faisant

$$x + h = z, \tag{3}$$

nous posons

$$R = f(z) - f(x) - \frac{z-x}{1} f'(x) - \ldots - \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x), \tag{4}$$

il viendra, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à x, et effaçant les termes qui s'entre-détruisent,

$$R' = -\frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x).$$

Or on a

$$R_z - R_a = (z-a)\,\partial\pi_a^z R'.$$

Il vient donc, en remplaçant R′ par sa valeur et observant que, pour $x = z$, R s'évanouit,

$$R_a = \frac{(z-a)}{1.2\ldots(n-1)}\,\partial\pi_a^z (z-x)^{n-1} f^{(n)}(x). \tag{5}$$

[*] Voir notre *Essai sur les principes fondamentaux de l'Analyse transcendante*, page 53.

De là résulte, en vertu des équations (3) et (4),

$$(6)\quad \begin{cases} f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n-1} f^{n-1}(a) + \frac{h}{1.2\ldots(n-1)} \mathfrak{M}_a^{a+h} (a+h-x)^{n-1} f^n(x), \end{cases}$$

c'est-à-dire la formule de Taylor, reproduite sous forme d'identité, et ne laissant rien d'indécis dans l'expression du reste.

En général, on se contente d'une précision moindre, et, au lieu d'établir l'équation (5), ce qui n'offre, ainsi qu'on vient de le voir, aucune difficulté, on se borne à démontrer que l'on peut écrire

$$(7)\qquad R_a = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(a+\theta h),$$

ou bien encore

$$(8)\qquad R_a = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^n(a+\theta h),$$

la valeur de θ variant d'une formule à l'autre, mais restant toujours comprise entre 0 et 1.

Les expressions (7) et (8) peuvent se déduire aisément de l'identité (6), lorsqu'on suppose que la condition de continuité s'étend jusqu'à la dérivée de l'ordre n. Il est visible, en effet, que, dans cette hypothèse, la moyenne des valeurs, représentées généralement par $(a+h-x)^{n-1} f^n(x)$, répond à une valeur de x comprise entre a et $a+h$. Il vient donc d'abord, en désignant par $a+\theta h$ cette valeur intermédiaire,

$$R_a = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^n(a+\theta h).$$

D'un autre côté, si l'on ajoute un terme au développement fourni par l'identité (6), elle devient

$$(9)\quad \begin{cases} f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(a) + \frac{h}{1.2\ldots n} \mathfrak{M}_a^{a+h} (a+h-x)^n f^{n+1}(x). \end{cases}$$

La comparaison des équations (6) et (9) donne immédiatement

$$(10)\quad \mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1}f^n(x)=\frac{h^{n-1}}{n}f^n(a)+\frac{1}{n}\mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^n f^{n+1}(x).$$

Soit d'ailleurs, comme cas particulier,

$$f^n(x) = \text{constante} = 1,$$

d'où

$$f^{n+1}(x) = 0.$$

On déduit de l'équation (10)

$$\mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1} = \frac{h^{n-1}}{n}.$$

Cela posé, soient M et m la plus grande et la plus petite des valeurs affectées par $f^n(x)$ dans l'intervalle compris entre a et $a+h$; on a évidemment

$$R_a < \frac{Mh}{1.2\ldots(n-1)}\mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1} < \frac{Mh^n}{1.2\ldots n},$$

$$R_a > \frac{mh}{1.2\ldots(n-1)}\mathfrak{M}_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1} > \frac{mh^n}{1.2\ldots n},$$

et par conséquent

$$R_a = \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a+\theta h).$$

Observons que l'expression (5) remplit une condition essentielle à laquelle les deux autres ne satisfont point : c'est de permettre que la valeur du reste puisse être calculée avec tel degré d'approximation qu'on désire.

II. — *Dérivation sous le signe* $\mathfrak{M}$.

Lemme. $\varphi(y)$ étant une fonction de y et de n, supposée telle que pour toute valeur de y comprise entre y_1 et y_2, elle converge vers 0, à mesure que n croît indéfiniment, $\varphi'(y)$ est une fonction de même nature. Donc aussi $\varphi''(y)$, et ainsi de suite pour toutes les dérivées successives.

Démonstration. On a généralement

$$\varphi(y)-\varphi(y_1) = (y-y_1)[\varphi'(y)+\xi];$$

mais, par hypothèse, il suffit de prendre n supérieur à une certaine limite, pour que chacune des quantités $\varphi(y)$, $\varphi(y_1)$ diffère aussi peu qu'on voudra de zéro. Il suit de là que le binôme $\varphi'(y)+\xi$ décroît indéfiniment à mesure que n augmente, et puisque les deux termes $\varphi'(y)$ et ξ sont irréductibles, il faut que chacun d'eux jouisse respectivement de cette propriété. Donc, etc.

Soit maintenant $F(x, y)$, ou même $\mathfrak{M}F(x, y)$, une fonction quelconque supposée continue pour toutes valeurs de x et de y respectivement comprises entre x_1 et x_2, y_1 et y_2. On a, par hypothèse,

$$(11)\qquad \mathfrak{M}_{x_1}^{x_2} F(x, y) = f(y).$$

De là résulte

$$(12)\qquad f(y) = \frac{F\left(x+\frac{h}{n}, y\right) + F\left(x+2\frac{h}{n}, y\right) + \ldots + F(x+h, y)}{n} + \varphi(y).$$

h étant fait égal à $x_2 - x_1$ et $\varphi(y)$ représentant une fonction qui satisfait aux conditions du lemme précédent.

L'équation (12) donne, en prenant la dérivée de l'ordre p par rapport à y,

$$f^p(y) = \frac{F_y^p\left(x+\frac{h}{n}, y\right) + F_y^p\left(x+2\frac{h}{n}, y\right) + \ldots + F_y^p(x+h, y)}{n} + \varphi^p(y).$$

Or, pour toute valeur de y comprise entre y_1 et y_2, $\varphi^p(y)$ converge vers zéro à mesure que n croît indéfiniment. Il vient donc, en général,

$$f^p(y) = \lim_{n=\infty}\left[\frac{F_y^p\left(x+\frac{h}{n}, y\right) + F_y^p\left(x+2\frac{h}{n}, y\right) + \ldots + F_y^p(x+h, y)}{n}\right] = \mathfrak{M}_{x_1}^{x_2} F_y^p(x, y),$$

et, eu égard à l'équation (11),

$$\frac{d^p \cdot \mathfrak{M}_{x_1}^{x_2} F(x, y)}{dy^p} = \mathfrak{M}_{x_1}^{x_2} F_y^p(x, y).$$

III. — *Démonstration élémentaire du théorème fondamental ayant pour énoncé :*

« Toute fonction est développable, suivant la série de Taylor, tant » que le module de la variable h reste moindre que la plus petite des

» valeurs pour lesquelles la fonction cesse d'être continue ou de » prendre mêmes valeurs aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. »

Soit

$$f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = P + Q\sqrt{-1}.$$

Considérons le produit $e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$, dans lequel n est entier. La dérivée de ce produit, prise par rapport à l'argument θ, est

$$\sqrt{-1}\left[re^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}} f'\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) - ne^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right)\right].$$

De là résulte, pour le cas où chacune des fonctions réelles P et Q prend mêmes valeurs respectives aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, et ne cesse pas de varier continûment entre ces limites,

$$(13)\quad r\mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}} f'\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = n\mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right).$$

On a d'ailleurs

$$(14)\quad \mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}} f'\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \frac{d.\mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right)}{dr}.$$

Si donc on pose

$$\mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r),$$

il vient, eu égard aux équations (13) et (14),

$$r\varphi'(r) = n\varphi(r).$$

Ce résultat exprime que la différence $n \log r - \log \varphi(r)$ a zéro pour dérivée, c'est-à-dire qu'elle est constante. On a donc [*]

$$\varphi(r) = Cr^n;$$

---

[*] En procédant par une suite de dérivations effectuées sur l'équation

$$r\varphi'(r) = n\varphi(r),$$

on trouve aisément

$$r^2\varphi''(r) = n(n-1)\varphi(r), \qquad r^3\varphi'''(r) = n(n-1)(n-2)\varphi(r), \ldots,$$
$$r^n\varphi^n(r) = n(n-1)\ldots 2.1.\varphi(r), \qquad \varphi^{n+1}(r) = 0.$$

De là résulte, comme conséquence immédiate des deux dernières équations :

$$1^\circ.\quad \varphi^n(r) = \text{constante}; \qquad 2^\circ.\quad \varphi(r) = Cr^n.$$

d'où, substituant,

$$(15)\qquad Cr^n = \mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right).$$

Supposons que le module r puisse varier depuis zéro jusqu'à R, sans que les fonctions P et Q cessent de remplir la condition des limites et d'être continues. En ce cas, la constante C conserve, pour tout cet intervalle, une seule et même valeur. Il vient donc, en prenant la dérivée de l'ordre n par rapport à r,

$$1.2\ldots nC = \mathfrak{M}_0^{2\pi} f^n\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right),$$

puis, faisant $r = 0$,

$$C = \frac{f^n(x)}{1.2\ldots n}.$$

Cette valeur, transportée dans l'équation (15), donne, en remplaçant r par R,

$$(16)\qquad \frac{f^n(x)}{1.2\ldots n} = \frac{1}{R^n}\mathfrak{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x - Re^{\theta\sqrt{-1}}\right).$$

Cela posé, considérons la série

$$f(x) + h\frac{f'(x)}{1} + h^2\frac{f''(x)}{1.2} + \ldots + h^n\frac{f^n(x)}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

En vertu de l'équation (16), cette série est nécessairement convergente pour toute valeur de h moindre que R. On a donc, en supposant $h < R$, et remarquant que toute valeur de x qui satisfait à l'équation (16) se lie à d'autres valeurs qui y satisfont également [*],

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots$$

C. Q. F. D.

---

[*] Voir les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, tome XIII, n° 7.

LETTRES

SUR DIVERSES QUESTIONS D'ANALYSE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE CONCERNANT L'ELLIPSOÏDE, ADRESSÉES A M. P.-H. BLANCHET,

PAR J. LIOUVILLE.

DEUXIÈME LETTRE.

Monsieur,

Je dois commencer par remplir une lacune (plus apparente pourtant que réelle) dans ma première Lettre, à l'endroit où de l'équation (I) je conclus l'équation (III). En rappelant la démonstration du théorème de Green d'après lequel la fonction

$$u = \int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} - \frac{\mathrm{SMN}}{\mathrm{S}'},$$

qu'on savait d'abord être nulle pour $\rho = \rho'$ et $\rho = \infty$, l'est également pour toutes les valeurs de ρ comprises entre ρ' et ∞, j'ai soin de dire que dans l'espace extérieur à l'ellipsoïde (ρ'), u et les dérivées partielles de u satisfont constamment à la condition d'être fonctions continues de x, y, z ou ρ, μ, ν; mais je n'ajoute aucune preuve de ce fait : or, on pourrait craindre qu'il n'eût pas lieu, si la fonction R s'évanouissait pour des valeurs de $\rho > \rho'$; les doutes tiendraient à la présence du facteur R^2 placé en dénominateur sous le signe intégral dans l'expression de S, savoir,

$$\mathrm{S} = (2n+1)\mathrm{R}\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\mathrm{R}^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Si donc l'équation $\mathrm{R} = 0$ avait une ou plusieurs racines réelles ρ entre

les limites c et ∞, et si ρ_0 désignait la plus grande de ces racines, on pourrait croire que notre analyse ne s'applique avec sûreté qu'aux valeurs de $\rho' > \rho_0$. Au fond la difficulté n'est pas sérieuse. Cependant, pour dissiper tout nuage, je vais prouver que l'équation $R = 0$ ne peut offrir aucune racine $> c$.

Mais avant de le faire, j'observe que, même dans l'hypothèse opposée, nos formules subsistant en prenant $\rho' > \rho_0$, on arriverait encore à l'équation

$$\iint l\,MNM_1N_1\,d\omega = 0,$$

que nous avons obtenue, et sur laquelle, du reste, l'étendue plus ou moins grande des valeurs de ρ n'a aucune influence, puisque ρ n'entre ni dans le produit $l\,d\omega$, ni dans les fonctions M, N, M_1, N_1, ni dans les limites de l'intégrale qui se rapporte à μ et ν seulement. Il suit de cette équation que les racines B sont réelles; nous n'aurons donc point à nous occuper de valeurs imaginaires de B.

Considérons l'équation

$$\frac{d^2v}{dt^2} = pv,$$

t étant une variable qui croît à partir de zéro, et p une fonction de t, positive et finie quand t l'est elle-même. L'intégrale de cette équation s'exprimera par les séries convergentes connues,

$$v = A\left(1 + \int_0^t dt \int_0^t p\,dt - \ldots\right) - A'\left(t - \int_0^t dt \int_0^t t\,p\,dt - \ldots\right):$$

A et A′ sont les valeurs initiales de v et de sa dérivée, et si l'une d'elles est nulle, il est clair que le signe de l'autre déterminera généralement le signe des quantités v, $\frac{dv}{dt}$, dont les valeurs absolues seront d'ailleurs des fonctions croissantes de t. Nous ne parlons pas du cas où l'on aurait à la fois $A = 0$, $A' = 0$; la fonction v serait alors identiquement nulle. Mais quand une seule des quantités A, A′ est nulle, il est impossible que l'on ait soit $v = 0$, soit $\frac{dv}{dt} = 0$, pour $t > 0$.

Cela étant, je prends la fonction M qui est composée en μ comme R l'est en ρ, sauf le changement qu'on a pu faire de $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en $\sqrt{c^2 - \mu^2}$;

M vérifiera l'équation différentielle

$$(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)\frac{d^2M}{d\mu^2} + [2\mu^3 - (b^2 + c^2)\mu]\frac{dM}{d\mu} = [n(n+1)\mu^2 - B]M.$$

La variable μ restant comprise entre b et c, je pose

$$t = \int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}},$$

et cette équation devient

$$\frac{d^2M}{dt^2} = [B - n(n+1)\mu^2]M.$$

Pour $t = 0$, c'est-à-dire pour $\mu = b$, on a

$$M = 0$$

si $\sqrt{\mu^2 - b^2}$ est facteur de M, et

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{d\mu}\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} = 0$$

si ce facteur n'existe pas. En admettant pour toutes les valeurs de μ l'inégalité

$$B > n(n+1)\mu^2, \quad \text{ou} \quad B - n(n+1)\mu^2 > 0.$$

on tomberait donc dans les conditions du lemme précédent, et il faudrait en conclure que, pour $t > 0$, on ne peut avoir ni $M = 0$, ni $\frac{dM}{dt} = 0$. Or il est clair que l'une de ces équations a nécessairement lieu pour la valeur de t qui répond à $\mu = c$, savoir, la première si $\sqrt{c^2 - \mu^2}$ est facteur de M, et la seconde s'il ne l'est pas. Il faut donc que l'on ait

$$B < n(n+1)\mu^2,$$

au moins pour une partie des valeurs de μ; et de là résulte, à fortiori,

$$B < n(n+1)c^2 < n(n+1)\rho^2 \text{ [*]}.$$

---

[*] En se servant de la fonction N, on trouverait de même $B > 0$. Voilà donc deux limites pour les valeurs des racines B. Ces limites $n(n+1)c^2$ et 0 peuvent être atteintes dans les cas extrêmes de $b = c$ et de $b = 0$.

Ainsi, dans l'équation

$$\frac{d^2 R}{d\varepsilon^2} = [n(n+1)\rho^2 - B]R,$$

le coefficient de R est essentiellement positif. On a

$$\varepsilon = \int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}},$$

et l'on peut prendre c pour limite inférieure de l'intégrale. Alors $\rho = c$ donnera $\varepsilon = 0$. Donc R s'évanouira pour $\varepsilon = 0$ si $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ est facteur de R, et, si R n'a pas ce facteur, l'équation

$$\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

nous montre que l'on aura $\frac{dR}{d\varepsilon} = 0$ pour $\varepsilon = 0$. Nous voilà encore dans les conditions du lemme ci-dessus; et l'impossibilité de l'équation $R = 0$ pour $\rho > c$, impossibilité que nous avions surtout en vue, se trouve démontrée. On peut ajouter que R étant à très-peu près égale à ρ^n, et partant positive, pour les valeurs de ρ très-grandes, doit être, d'après notre analyse, une fonction de ρ sans cesse croissante et toujours positive depuis $\rho = c$ jusqu'a $\rho = \infty$. La dérivée $\frac{dR}{d\varepsilon}$ jouit évidemment de la même propriété. Toutefois, une de ces deux fonctions R, $\frac{dR}{d\varepsilon}$, est nulle pour $\rho = c$.

C'est la condition d'une valeur nulle pour $\rho = \infty$, qui fait qu'on doit prendre S et non pas R dans la formule (III) à laquelle on arrive par des intégrations effectuées dans l'espace infini extérieur à (ρ'). C'est une condition de continuité nécessaire dans nos calculs pour la valeur particulière $\rho = c$, qui fait qu'on doit avoir R et non pas S dans la formule (II) obtenue en intégrant dans tout l'espace intérieur à (ρ'). Les produits RMN, SMN jouissent, au reste, l'un et l'autre de la propriété, tout à fait essentielle ici, d'avoir en chaque point (x, y, z) de l'espace une valeur unique qui se retrouve toujours la même lorsque, après des variations quelconques, x, y, z redeviennent les mêmes.

Les remarques précédentes sur la démonstration que je vous ai donnée des formules (A), (B), (C) découlent de la nature même des choses, et l'on doit les retrouver explicitement ou implicitement dans chacune

des démonstrations qu'on pourra imaginer pour les formules dont nous parlons. Il en est ainsi, en effet, pour toutes celles que j'ai obtenues. Ces démonstrations pourtant peuvent être présentées sous des formes très-diverses. En voici une qui me paraît digne de quelque attention; elle a l'avantage de ne pas supposer qu'on ait démontré, à priori, l'existence d'une fonction λ' satisfaisant à l'équation

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \mathrm{MN}, \quad \text{pour} \quad \rho = \rho'.$$

Dans cette démonstration nouvelle, on considère les polynômes RMN, R′M′N′, relatifs à deux points (x, y, z), (x', y', z') dont le premier est quelconque, mais dont le second, situé à la distance Δ du premier, doit prendre successivement toutes les positions possibles seulement dans l'intérieur d'un certain ellipsoïde déterminé par une valeur particulière de ρ', et dont il s'agira toujours ici quand nous parlerons de l'ellipsoïde (ρ'). Il y aura deux manières d'effectuer sur l'intégrale triple

$$(a) \quad \int\int\int \left(\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dy'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dy'} + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dz'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dz'} \right) dx'dy'dz',$$

étendue à tout cet espace intérieur, une intégration par parties. On a, par exemple,

$$dy'dz' \int \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} dx' = \frac{dy'dz'}{\Delta} \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'} - dy'dz' \int \frac{dx'}{\Delta} \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dx'^2}.$$

La valeur de

$$\int\int\int \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} dx'dy'dz'$$

sera donc composée de deux termes séparés. L'un d'eux est l'intégrale triple, prise négativement,

$$-\int\int\int \frac{dx'dy'dz'}{\Delta} \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dx'^2};$$

pour former l'autre, il faut observer que, dans l'intégrale définie relative à x', les limites se rapportent à la surface de l'ellipsoïde (ρ');

en exprimant $dy'dz'$ au moyen de l'élément $d\omega'$ de cette surface, et de l'angle α' que la normale à $d\omega'$, menée extérieurement, fait avec l'axe des x, on trouve facilement (je n'insisterai pas sur une méthode si connue) l'expression finale suivante :

$$\int\int \frac{\cos\alpha'\, d\omega'}{\Delta}\, \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'}.$$

La valeur complète de l'intégrale (a) est donc

$$\int\int \frac{d\omega'}{\Delta}\left(\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'}\cos\alpha' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dy'}\cos\beta' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dz'}\cos\gamma'\right)$$
$$-\int\int\int \frac{dx'dy'dz'}{\Delta}\left(\frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dx'^2} + \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dy'^2} + \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dz'^2}\right).$$

Mais cette valeur peut être simplifiée beaucoup. D'abord la seconde ligne disparaît d'elle-même, puisque l'on a identiquement

$$\frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dx'^2} + \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dy'^2} + \frac{d^2.\mathrm{R'M'N'}}{dz'^2} = 0.$$

Quant à la première, j'observe que, dans la quantité entre parenthèses qui multiplie $d\omega'$, on doit, après avoir effectué les différentiations indiquées, mettre pour x', y', z' les valeurs qui conviennent à cet élément $d\omega'$. D'un point de cet élément faisons partir une normale ds' extérieure à l'ellipsoïde (ρ'); le long de ds', ρ' seule variera, et nous avons vu que

$$ds' = \frac{d\rho'}{h'} = \frac{d\rho'}{l'\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}:$$

la variation correspondante de R'M'N' sera, en conséquence,

$$ds'\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{ds'} = ds'\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}.l'\frac{d\mathrm{R'}}{d\rho'}\,\mathrm{M'N'}.$$

Mais ds' fait avec les axes des coordonnées x, y, z, les angles α', β', γ'. En passant d'une des extrémités de ds' à l'autre, les coordonnées x', y', z' augmenteront donc de

$$ds'\cos\alpha', \quad ds'\cos\beta', \quad ds'\cos\gamma';$$

la variation de R'M'N' peut donc encore s'exprimer par

$$ds'\left(\frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dx'}\cos\alpha' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dy'}\cos\beta' + \frac{d.\mathrm{R'M'N'}}{dz'}\cos\gamma'\right).$$

De cette double expression d'une même quantité, nous concluons qu'on peut, sous le signe $\int$, au lieu de

$$\frac{d.\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'}{dx'}\cos\alpha' + \frac{d.\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'}{dy'}\cos\beta' + \frac{d.\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'}{dz'}\cos\gamma',$$

écrire

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}.l'\frac{d\mathrm{R}'}{d\rho'}\mathrm{M}'\mathrm{N}'.$$

En mettant en dehors les facteurs constants, la valeur définitive de l'intégrale (a) se trouve donc être

$$(b) \qquad \sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}\frac{d\mathrm{R}'}{d\rho'}\int\int\frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'d\omega'}{\Delta}.$$

Mais l'intégration par parties aurait pu être dirigée d'une autre manière, pour ainsi dire inverse, en prenant pour point de départ la formule

$$\int\frac{d.\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'}{dx'}\frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'}dx' = -\frac{d}{dx}\int\frac{d.\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'}{dx'}\frac{dx'}{\Delta} = \mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} - \frac{d^2}{dx^2}\int\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\frac{dx'}{\Delta}.$$

De là on aurait conclu pour l'intégrale (a) cette valeur

$$\int\int\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\left(\frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'}\cos\alpha' - \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dy'}\cos\beta' + \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dz'}\cos\gamma'\right)d\omega'$$

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)\int\int\int\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\frac{dx'dy'dz}{\Delta}.$$

A l'aide du procédé même dont on vient à l'instant de faire usage, la première ligne peut s'exprimer ainsi,

$$\int\int\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega'.$$

Quant à la seconde, elle est nulle si le point x, y, z est extérieur à l'ellipsoïde (ρ'), c'est-à-dire si ρ surpasse ρ'. Mais elle est différente de zéro et égale à $4\pi\mathrm{RMN}$ si l'on a $\rho < \rho'$. Voilà donc une nouvelle va-

leur de l'intégrale (a); c'est

$$R' \int\int M'N' \frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} d\omega', \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

et

$$R' \int\int M'N' \frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} d\omega' + 4\pi RMN, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

Comparant avec la valeur (b), il s'ensuit pour les deux cas respectifs de $\rho > \rho'$ et de $\rho < \rho'$, les deux formules

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}.\frac{dR'}{d\rho'}\int\int \frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = R' \int\int M'N' \frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} d\omega',$$

et

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}.\frac{dR'}{d\rho'}\int\int \frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = R' \int\int M'N' \frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} d\omega' + 4\pi RMN.$$

En conservant au point (x, y, z) la même position, mais prenant (x', y', z') au dehors de l'ellipsoïde (ρ'), et considérant, au lieu de l'intégrale (a), l'intégrale analogue

$$\int\int\int \left(\frac{d.S'M'N'}{dx'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dx'} + \frac{d.S'M'N'}{dy'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dy'} + \frac{d.S'M'N'}{dz'} \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dz'} \right) dx'dy'dz',$$

dans laquelle la sommation s'étend à tout l'espace infini extérieur à (ρ'), on trouve de même

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}.\frac{dS'}{d\rho'}\int\int \frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = S' \int\int M'N' \frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} d\omega' - 4\pi SMN,$$

pour $\rho > \rho'$, et

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}.\frac{dS'}{d\rho'}\int\int \frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = S' \int\int M'N' \frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} d\omega',$$

pour $\rho < \rho'$.

Les deux formules relatives au cas de $\rho > \rho'$, savoir,

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}\cdot\frac{dR'}{d\rho'}\int\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = R'\int\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega',$$

et

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}\cdot\frac{dS'}{d\rho'}\int\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = S'\int\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega' - 4\pi SMN.$$

étant multipliées, la première par S', la seconde par R', et retranchées. donnent

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}\left(S'\frac{dR'}{d\rho'} - R'\frac{dS'}{d\rho'}\right)\int\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = 4\pi R'SMN,$$

laquelle, en se rappelant que

$$S'\frac{dR'}{d\rho'} - R'\frac{dS'}{d\rho'} = \frac{2n+1}{\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}},$$

devient enfin la formule

$$\text{(C)}\qquad \int\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi R'SMN}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

dont on a de la sorte une seconde démonstration. En combinant les deux équations qui supposent $\rho < \rho'$, on arriverait de même à la formule (B).

Mais notre analyse conduit en même temps aux formules (D), (E que j'ai indiquées à la fin de ma première Lettre. Pour obtenir, par exemple, la formule (D), rappelez-vous que l'on a, pour $\rho > \rho'$,

$$\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}\cdot\frac{dR'}{d\rho'}\int\int\frac{l'M'N'd\omega'}{\Delta} = R'\int\int M'N'\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'}d\omega'.$$

Or

$$\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} = -\frac{1}{\Delta^2}\frac{d\Delta}{ds'};$$

$\frac{d\Delta}{ds'}$ exprime évidemment au signe près le cosinus de l'angle v' compris

entre la normale à $d\omega'$, menée extérieurement à l'ellipsoïde (ρ'), et la droite qui va de $d\omega'$ au point (x, y, z); on a donc

$$\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} = \frac{\cos\nu'}{\Delta}.$$

De là résulte

$$R'\int\int\frac{M'N'\cos\nu'\,d\omega'}{\Delta^2} = \sqrt{\rho'^2 - b^2}\,\sqrt{\rho'^2 - c^2}\,.\,\frac{dR'}{d\rho'}\int\int\frac{l'M'N'\,d\omega}{\Delta}.$$

Il suffit maintenant de remplacer dans le second membre l'intégrale qui s'y trouve par sa valeur que fournit l'équation (C), puis de diviser par R'. Le résultat sera précisément la formule (D).

Quelque facile que soit la méthode que je viens d'employer pour démontrer les formules (D), (E), il y en a une plus facile et plus rapide encore. Je dis, en effet, que la formule (D) résulte de la formule

$$(C)\qquad \int\int\frac{l'M'N'\,d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi R'SMN}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

par une simple différentiation relative au paramètre ρ'. Il semble d'abord qu'une telle différentiation doive être compliquée au moins pour le premier membre. Mais rappelez-vous que $l'd\omega'$ ne contient pas ρ', mais seulement μ' et ν', quantités qui varient entre des limites fixes, et auxquelles se rapporte l'intégration; M' et N' sont aussi indépendants de ρ', il suffit donc de différentier $\frac{1}{\Delta}$; et comme

$$\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\rho'} = \frac{1}{h'}\,\frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds'} = \frac{\cos\nu'}{\Delta^2 . l'\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}},$$

vous avez

$$\int\int\frac{M'N'\cos\nu'\,d\omega'}{\Delta^2\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}} = \frac{4\pi SMN}{2n+1}\,\frac{dR'}{d\rho'},$$

d'où résulte

$$\int\int\frac{M'N'\cos\nu'\,d\omega'}{\Delta^2} = \frac{4\pi\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}}{2n+1}\,\frac{dR'}{d\rho'}\,SMN, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

c'est-à-dire la formule (D). En différentiant la formule (B), on arriverait de même à la formule (E).

Il n'est donc pas indispensable, pour démontrer les formules (D), (E), de combiner deux équations de la forme

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0,\qquad \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0,$$

et l'on peut suivre une route plus courte que celle dont je vous parlais dans ma première Lettre. Les combinaisons de cette espèce n'en ont pas moins beaucoup d'utilité. Permettez-moi de vous montrer ici comment on en déduit la formule

$$\int\int lMNM_1N_1\,d\omega=0.$$

On multiplie par $dx\,dy\,dz$, et l'on intègre l'équation

$$v\frac{d^2u}{dx^2}-u\frac{d^2v}{dx^2}+v\frac{d^2u}{dy^2}-u\frac{d^2v}{dy^2}+v\frac{d^2u}{dz^2}-u\frac{d^2v}{dz^2}=0.$$

Étendons l'intégration à tous les points compris dans l'intérieur d'une surface fermée quelconque, en admettant que, dans cet espace, les fonctions u, v et leurs dérivées n'éprouvent aucune discontinuité. Les deux premiers termes s'intègrent d'abord par rapport à x, les deux suivants par rapport à y, les deux derniers enfin par rapport à z. Introduisons l'élément $d\omega$ de la surface par laquelle les intégrations sont limitées, et désignons par ds la longueur d'une normale infiniment petite, de sorte qu'en passant de l'élément à l'extrémité de la normale, u et v éprouvent les variations

$$\frac{du}{ds}ds,\qquad \frac{dv}{ds}ds;$$

nous trouverons, en définitive,

$$\int\int v\frac{du}{ds}\,d\omega=\int\int u\frac{dv}{ds}\,d\omega.$$

Je ne m'arrête pas aux détails du calcul; ils sont très-familiers aux géomètres, et d'ailleurs nous venons déjà d'effectuer une transformation du même genre.

Je prends maintenant pour surface fermée l'ellipsoïde φ, et, en

conséquence, je remplace ds par sa valeur

$$\frac{d\rho}{h}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{l\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}};$$

les dérivées ou entrait ds seront alors rapportées à ρ seule, et, en supprimant le diviseur commun

$$\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2},$$

on aura

$$(c) \qquad \int\int lv\frac{du}{d\rho}\,d\omega = \int\int lu\frac{dv}{d\rho}\,d\omega.$$

Soient donc

$$u = \mathrm{RMN}, \quad v = \mathrm{R_1M_1N_1},$$

les fonctions R, $\mathrm{R_1}$ répondant soit à deux valeurs de n différentes, soit à une même valeur de n, mais à deux valeurs de B distinctes. Ces expressions de u et v satisfont évidemment aux conditions imposées plus haut. En les adoptant, l'équation (c) devient

$$\mathrm{R_1}\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\int\int l\,\mathrm{MNM_1N_1}\,d\omega = \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R_1}}{d\rho}\int\int l\,\mathrm{MNM_1N_1}\,d\omega,$$

d'où

$$\left(\mathrm{R_1}\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R_1}}{d\rho}\right)\int\int l\,\mathrm{MNM_1N_1}\,d\omega = 0.$$

En laissant ρ quelconque, on ne peut pas avoir

$$\mathrm{R_1}\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R_1}}{d\rho} = 0;$$

il en résulterait, en effet,

$$\mathrm{R_1} = \mathrm{CR},$$

C étant une constante. Or le rapport de chaque polynôme R à la puissance ρ^n est l'unité pour $\rho = \infty$. L'équation que nous venons d'écrire est donc absurde si n n'est pas le même pour R et $\mathrm{R_1}$; n étant le même de part et d'autre, elle est impossible encore parce qu'elle entraînerait l'identité de R et de $\mathrm{R_1}$, contrairement à notre hypothèse. On a donc nécessairement

$$\int\int l\,\mathrm{MNM_1N_1}\,d\omega = 0;$$

c'est la formule que nous nous proposions de démontrer. Si l'on prend en particulier $M_1 = 1$, $N_1 = 1$, on en conclut généralement

$$\int\int l\,MN\,d\omega = 0;$$

le cas de $M = 1$, $N = 1$, fait seul exception.

Dans l'équation

$$\int\int l\,MN\,M_1\,N_1\,d\omega = 0,$$

comme dans les équations (A), (B), (C), et en général dans toute la marche de notre analyse, vous devez reconnaître une analogie frappante avec les fonctions Y_n de la *Mécanique céleste*, ou plutôt avec les différents termes dont les fonctions Y_n sont composées. Les produits MN jouissent des mêmes propriétés que les termes dont nous parlons, et vous allez voir qu'ils s'y réduisent identiquement lorsqu'il s'agit d'ellipsoïdes de révolution allongés ou aplatis, c'est-à-dire lorsqu'on fait $b = c$ ou $b = 0$.

Cette réduction s'offre d'elle-même; on ne rencontre aucune difficulté en l'effectuant. Toutefois, comme elle est très-curieuse, je vous demande la permission de m'y arrêter un peu. Mais, avant tout, je vous rappellerai que chaque fonction M, N, peut être sans inconvénient multipliée par une constante arbitraire; l'introduction d'une telle constante n'empêchera pas les équations différentielles linéaires dont M et N dépendent d'être satisfaites, et ne changera rien, ni à la formule

$$\int\int l\,MN\,M_1\,N_1\,d\omega = 0,$$

ni aux formules (A), (B), (C), qui sont homogènes en M et N. Ainsi peu nous importera d'introduire ou de supprimer dans l'expression de M ou de N un facteur constant.

En laissant d'abord b et c quelconques, substituons aux variables μ et ν les angles φ et ψ de M. Jacobi, d'après les formules

$$\mu = \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}, \quad \nu = b \cos \psi.$$

L'équation

$$\mu^2 - b^2 \,(\mu^2 - c^2)\,\frac{d^2M}{d\mu^2} + [2\mu^3 - b^2 - c^2\,\mu]\,\frac{dM}{d\mu} = [n(n+1)\,\mu^2 - B]\,M,$$

que M vérifie, et qui peut s'écrire

$$\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{c^2-x^2}\,\frac{d.\sqrt{(x^2-b^2)(c^2-x^2)}\,\frac{dM}{dx}}{dx}-[n(n+1)x^2-B]M=0,$$

deviendra

$$c^2\cos^2\varphi-b^2\sin^2\varphi)\frac{d^2M}{d\varphi^2}-(c^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\frac{dM}{d\varphi}$$
$$-[n(n+1)(c^2\cos^2\varphi-b^2\sin^2\varphi)-B]M=0;$$

il faut y satisfaire, en général, par une fonction entière de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sqrt{c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}$, et, dans le cas particulier de $b=c$ ou de $b=0$, par une fonction entière de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ seulement.

De même, l'équation en N, qui est d'abord

$$\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\,\frac{d.\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}\,\frac{dN}{d\nu}}{d\nu}=[n(n+1)\nu^2-B]N,$$

devient

$$(c^2-b^2\cos^2\psi)\frac{d^2N}{d\psi^2}-b^2\sin\psi\cos\psi\frac{dN}{d\psi}=[n(n+1)b^2\cos^2\psi-B]N;$$

et il s'agit d'y satisfaire par une fonction entière de $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sqrt{c^2-b^2\cos^2\psi}$, dans le cas général, et par une fonction entière de $\sin\psi$, $\cos\psi$ seulement, lorsqu'on prend $b=c$ ou $b=0$.

En faisant $b=c$, nous avons pour M et N les équations suivantes:

$$\frac{d^2M}{d\varphi^2}-\frac{[n(n+1)c^2-B]}{c^2}M=0,$$

et

$$(1-\cos^2\psi)\frac{d^2N}{d\psi^2}-\sin\psi\cos\psi\frac{dN}{d\psi}=\left[n(n+1)\cos^2\psi-\frac{B}{c^2}\right]N.$$

La première ne peut être vérifiée par une fonction entière de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, qu'en prenant pour valeur de $\frac{n(n+1)c^2-B}{c^2}$ le carré d'un nombre entier i; dans toute autre hypothèse la fonction M ne redeviendrait pas la même en augmentant φ de 2π, ce qui doit avoir lieu quand elle est

rationnelle en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. Ainsi

$$B = [n(n+1) - i^2]c^2.$$

L'équation en N, si l'on pose $\cos\psi = q$, prend ensuite la forme

$$\frac{d.(1-q^2)\frac{dN}{dq}}{dq} + \left[n(n+1) - \frac{i^2}{1-q^2}\right]N = 0.$$

C'est précisément l'équation que l'on trouve en discutant les fonctions Y_n et cherchant la loi de composition de leurs différents termes. En consultant une thèse de M. Olinde Rodrigues, imprimée dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (tome III, page 375), vous verrez que l'on doit prendre i au plus égal à n pour avoir des valeurs de N fonctions entières de q, $\sqrt{1-q^2}$; les valeurs de i sont donc $0, 1, 2, \ldots, n$, et pour ces valeurs on trouve, en effet, une expression de N convenable,

$$N = (1-q^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^{i+n}.(1-q^2)^n}{dq^{i+n}}.$$

Quant à la valeur de M, elle est double pour chaque entier i différent de zéro; on peut faire

$$M = \cos i\varphi, \quad \text{et} \quad M = \sin i\varphi,$$

mais pour $i = 0$, on n'a qu'une seule valeur $M = 1$.

Les produits MN, lorsque $b = c$, sont ainsi les mêmes que pour la sphère, et en effet ils ne changeraient pas en posant $c = 0$. Ils s'expriment par les formules

$$(1-q^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^{i+n}.(1-q^2)^n}{dq^{i+n}} \cos i\varphi, \quad (1-q^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^{i+n}.(1-q^2)^n}{dq^{i+n}} \sin i\varphi.$$

Leur nombre est $2n+1$, et ce sont eux qui, multipliés par des constantes arbitraires, forment les $2n+1$ termes de la fonction générale Y_n.

Il nous reste à examiner les fonctions R. Dans le cas de $b = c$, on a, nous l'avons dit plus haut,

$$B = [n(n+1) - i^2]c^2.$$

l'équation dont R dépend est donc alors

$$(\rho^2 - c^2)^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + (2\rho^3 - 2c^2\rho)\frac{dR}{d\rho} = [n(n+1)\rho^2 - c^2 + i^2 c^2] R$$

En la mettant sous la forme

$$\frac{d.(c^2 - \rho^2)\frac{dR}{d\rho}}{d\rho} + \left[n(n+1) - \frac{i^2 c^2}{c^2 - \rho^2}\right] R = 0,$$

et la comparant à l'équation en N, dont on a donné l'intégrale, on trouve

$$R = \frac{(\rho^2 - c^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i-n}(\rho^2 - c^2)^n}{d\rho^{i-n}};$$

le diviseur numérique a été introduit pour rendre le rapport de R à ρ^n égal à l'unité lorsque $\rho = \infty$. Pour chaque entier n, le nombre des valeurs de R est $n+1$; mais les valeurs de R pour lesquelles i diffère de zéro entrent dans deux des produits RMN; pour ces deux produits, N reste aussi le même, mais M est $\cos i\varphi$ pour l'un, $\sin i\varphi$ pour l'autre; de là $2n-1$ produits distincts RMN.

En appliquant les formules (A), (B), (C) aux deux combinaisons R, S, M, N qui ne diffèrent que par la valeur de M, ou qui répondent au même couple (n, i), vous vous assurerez facilement que ces formules ont lieu non-seulement pour chaque produit MN isolé, mais encore pour la somme des deux produits conjugués MN multipliés chacun par une constante arbitraire. Ainsi, par exemple, l'équation

$$\iint \frac{l'\zeta' d\omega'}{\Delta} = m\zeta,$$

dont je vous ai parlé dans ma première Lettre, sera vérifiée par

$$\zeta = (G\cos i\varphi + H\sin i\varphi)\,N,$$

quelles que soient les constantes G, H.

Notons enfin les formules

$$x = \rho\cos\psi, \quad y = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sin\psi\cos\varphi, \quad z = \sqrt{\rho^2 - c^2}\sin\psi\sin\varphi,$$
$$l d\omega = \sin\psi\, d\varphi\, d\psi,$$

qui sont beaucoup plus simples que celles relatives au cas de b et c quelconques.

Maintenant passons de l'ellipsoïde de révolution pour lequel $b = c$, à la sphère où l'on a de plus $c = 0$; les valeurs de x, y, z exprimées par les angles φ, ψ, et par le demi-axe ρ qui deviendra un rayon de sphère, se réduiront aux formules connues des coordonnées polaires

$$x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \psi \sin \varphi;$$

l'équation en R prendra la forme

$$\frac{d.\rho^2 \frac{dR}{d\rho}}{d\rho} = n(n+1)R,$$

et donnera

$$R = \rho^n, \quad S = \frac{1}{\rho^{n+1}},$$

quelle que soit la valeur de i. En remplaçant $l'd\omega'$ par sa valeur $\sin\psi' d\varphi' d\psi'$, les formules (A), (B), (C) nous donneront donc

$$\iint \frac{M'N' \sin\psi' d\varphi' d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi MN}{(2n+1)\rho'}, \quad \text{pour} \quad \rho = \rho',$$

$$\iint \frac{M'N' \sin\psi' d\varphi' d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi \rho^n MN}{(2n+1)\rho'^{n+1}}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

$$\iint \frac{M'N' \sin\psi' d\varphi' d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi \rho'^n MN}{(2n+1)\rho^{n+1}}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

D'après leur forme même, on peut dans ces dernières équations remplacer MN et M'N' par les fonctions générales Y_n, Y'_n qui se composent linéairement avec ces produits. Nous avons ainsi

$$\iint \frac{Y'_n \sin\psi' d\varphi' d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi Y_n}{(2n+1)\rho'}, \quad \text{pour} \quad \rho = \rho',$$

$$\iint \frac{Y'_n \sin\psi' d\varphi' d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi \rho^n Y_n}{(2n+1)\rho'^{n+1}}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

$$\iint \frac{Y'_n \sin\psi' d\varphi' d\psi'}{\Delta} = \frac{4\pi \rho'^n Y_n}{(2n+1)\rho^{n+1}}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho',$$

et nous retombons, par une route nouvelle et plus générale, sur les résultats que les géomètres avaient obtenus relativement aux fonc-

tions Y_n. Nous voyons aussi comment il arrive que, dans le cas de la sphère, on puisse grouper $2n+1$ fonctions simples MN et en former la fonction complexe Y_n qui jouit encore des propriétés principales de ces fonctions simples. Cela tient à ce que R, devenant indépendant de i, se conserve le même mème pour les différents produits MN qui répondent à chaque entier déterminé n. Pour l'ellipsoïde quelconque, la formule

$$\int\int \frac{V'z'd\omega'}{\Delta} = mz,$$

où nous avons

$$m = \frac{4\pi RS}{2n+1}.$$

présente des valeurs de m généralement différentes entre elles; ces valeurs deviennent en partie égales deux à deux pour l'ellipsoïde de révolution; enfin pour la sphère, on peut les assembler par groupes de $2n+1$ valeurs égales rapportés aux entiers successifs $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Ceci méritait d'être remarqué.

Après les longs détails dans lesquels je suis entré relativement au cas de $b=c$ ou de l'ellipsoïde allongé, je dois me garder d'insister sur celui de $b=0$ ou de l'ellipsoïde aplati. Je me bornerai à vous dire que l'on alors $B = i^2c^2$, i désignant encore successivement les entiers $0, 1, 2, \ldots, n$, et que l'équation en R à laquelle on est conduit se ramène à la forme de celle discutée tout à l'heure, en posant $\rho = \sqrt{c^2+k^2}$ et prenant k pour variable au lieu de ρ.

Revenons au cas général d'un ellipsoïde à trois axes inégaux; et l'analogie des produits MN avec les fonctions Y_n va se présenter à nous sous un nouvel aspect.

Considéré comme fonction de μ et ν, ou, si l'on veut, de μ, ν, $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\mu^2}$, $\sqrt{b^2-\nu^2}$, $\sqrt{c^2-\nu^2}$, sans s'inquiéter de ρ qu'on laissera constante, le produit MN ne diffère pas essentiellement du produit RMN; la présence d'un facteur constant R est, en effet, nous l'avons vu, indifférente. Mais RMN s'exprime par un polynôme du degré n en x, y, z. Donc sur chaque ellipsoïde déterminé (ρ), le produit MN s'exprimera aussi par un polynôme en x, y, z de degré n.

Rappelez-vous à présent la sphère auxiliaire de rayon 1, concen-

trique à l'ellipsoïde, et dont les points $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ *correspondent* à (x, y, z). Vous savez qu'on a

$$x = \rho \mathrm{x}, \quad y = \sqrt{\rho^2 - b^2}.\mathrm{y}, \quad z = \sqrt{\rho^2 - c^2}.\mathrm{z}.$$

Donc chaque produit MN pourra être transformé en une fonction de degré n en x, y, z.

Introduisons enfin des coordonnées polaires θ, ϖ auxquelles nous rapporterons les points de la sphère, et faisons

$$\mathrm{x} = \cos\theta, \quad \mathrm{y} = \sin\theta\cos\varpi, \quad \mathrm{z} = \sin\theta\sin\varpi;$$

MN deviendra une fonction entière de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varpi$, $\sin\theta\sin\varpi$, et je dis que cette fonction, considérée par rapport aux variables θ et ϖ, rentre dans les fonctions Y_n de Laplace.

D'abord en μ et ν, et en posant

$$\eta = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}, \quad \zeta = \int \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}},$$

on a les équations

$$\frac{d^2\mathrm{M}}{d\eta^2} = [\mathrm{B} - n(n+1)\mu^2]\,\mathrm{M}, \quad \frac{d^2\mathrm{N}}{d\zeta^2} = [n(n+1)\nu^2 - \mathrm{B}]\,\mathrm{N}.$$

Faisons $\mathrm{MN} = \Phi$, et nous en conclurons aisément

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} + n(n+1)(\mu^2 - \nu^2)\Phi = 0.$$

Introduisons θ et ϖ au lieu de μ et ν. En comparant les valeurs de x, y, z en μ, ν à celles de x, y, z en θ, ϖ, il vient

$$\frac{x\nu}{bc} = \cos\theta, \quad \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}} = \sin\theta\cos\varpi, \quad \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}} = \sin\theta\sin\varpi,$$

équations dont la troisième n'est qu'une conséquence des deux autres.

L'élimination de μ et ν donnera, tout calcul fait,

$$\sin\theta\frac{d.\sin\theta\dfrac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = 0.$$

Mais cette équation est celle des fonctions Y_n. On sait que la fonction

entiere en $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varpi$, $\sin\theta\sin\varpi$, la plus générale qui puisse y satisfaire, est $\Phi = Y_n$, Y_n présentant $2n+1$ constantes arbitraires. Donc le produit MN exprimé en θ et ϖ est, par rapport à ces variables, un cas particulier de Y_n. Réciproquement Y_n exprimée en μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., n'est autre chose qu'une somme des divers produits MN relatifs au nombre n, multipliés chacun par une constante arbitraire. En effet, cette somme doit être égale à une fonction de forme Y_n, et comme elle renferme $2n+1$ constantes arbitraires, elle offre la valeur générale même de Y_n.

On parcourt la surface de l'ellipsoïde (ρ) et le cercle entier des valeurs de μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., dans les questions qui nous occupent, en parcourant la surface entière de la sphère concentrique de rayon 1, c'est-à-dire en faisant varier θ dans l'étendue d'une demi-circonférence et ϖ dans l'étendue d'une circonférence entière. Cela posé, le développement d'une fonction de μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., que l'on regardera comme successivement relative à tous les points de la surface de l'ellipsoïde, ne différera nullement du développement sphérique en série de la forme ΣY_n. On pourra représenter ce développement par ΣAMN; mais si l'on veut pouvoir y appliquer immédiatement les résultats démontrés pour la série ΣY_n, il faudra considérer comme ne formant qu'un seul terme, analogue ou pour mieux dire égal à Y_n, l'ensemble des termes AMN qui répondent au même entier n, mais à des valeurs de B différentes.

Pour exprimer une fonction *rationnelle et entière* quelconque de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varpi$, $\sin\theta\sin\varpi$, ou, si l'on veut, de x, y, z, il suffit, comme on sait, d'un nombre limité de fonctions Y. Il suffira donc aussi, dans ce cas, d'un nombre limité de produits MN. Cela arrivera, par conséquent, pour toute fonction de μ et ν composée d'un ou de plusieurs termes exprimables chacun par une fonction entière et symétrique de μ^2, ν^2, ou par le produit d'une telle fonction et de facteurs de la forme $\mu\nu$, $\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$. En effet, ces facteurs sont des fonctions entières de x, y, z; par suite, il en est de même pour $\mu^2\nu^2$, $\mu^2+\nu^2$, puis pour une fonction entière, symétrique en μ^2, ν^2, et enfin pour la fonction proposée. Le cas particulier que nous venons d'indiquer, et où l'on peut exprimer une fonction donnée par un nombre

limité de termes AMN, méritait d'être mentionné. Il peut être traité à part directement et serait très-digne de nous arrêter si l'objet même de cette Lettre ne nous interdisait de tels détails. Mais, en général, l'expression d'une fonction exige l'emploi de tous les produits MN en nombre infini; et de là un genre de développement qui, du reste, n'est au fond que le développement ΣY_n de Laplace, les groupes de produits MN étant équivalents aux groupes Y_n, et devenant même identiques avec eux pour $b = c$ et pour $b = 0$.

Les fonctions Y_n, relatives à la sphère, s'exprimant en μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., par une somme de produits AMN, on peut se demander ce que sont pour la sphère ces quantités μ, ν. Or les coordonnées x, y, z d'un point de la sphère sont données par les formules

$$x = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

De là on tire

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0,$$

et

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0.$$

En regardant μ et ν comme des constantes, et x, y, z comme des coordonnées courantes, ces équations représentent deux cônes qui ont leur sommet commun au centre de la sphère et qui se coupent entre eux orthogonalement. Ces cônes jouent ici, par rapport à la sphère, le même rôle que les hyperboloïdes à une et à deux nappes jouent par rapport à l'ellipsoïde (ρ); M. Lamé, dans ses recherches, les a pris pour point de départ, et a ainsi obtenu d'abord pour la sphère même les fonctions M et N qui se sont ensuite appliquées sans aucun changement à l'ellipsoïde.

Les surfaces hyperboliques homofocales coupent l'ellipsoïde (ρ) suivant ses deux systèmes de lignes de courbure, respectivement représentés par les équations

$$\mu = \text{constante}, \qquad \nu = \text{constante}.$$

Ces mêmes équations appliquées à la sphère y déterminent les lignes

correspondantes aux lignes de courbure; on voit que les lignes correspondantes dont nous parlons sont des coniques sphériques orthogonales entre elles. Un point est déterminé sur la sphère par la rencontre de deux coniques sphériques, comme il l'est sur l'ellipsoïde par l'intersection de deux lignes de courbure.

Dans le développement d'une fonction Q sous la forme

$$Q = \Sigma AMN,$$

on peut déterminer A en multipliant les deux membres par $lMN\,d\omega$, puis intégrant, conformément à la méthode ordinaire. Il vient ainsi

$$A = \frac{\int\int lQMN\,d\omega}{\int\int lM^2N^2\,d\omega}.$$

En adoptant cette valeur de A et regardant, nous le répétons, comme ne formant qu'un seul terme l'ensemble des produits AMN qui répondent à chaque entier n, la fonction Q se trouvera représentée par ΣAMN comme elle l'est par une série ΣY_n. Si pour chaque système de valeurs de μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., la fonction Q a une valeur unique et déterminée, fonction continue de μ, ν, il en sera de même de la série.

Quand une fonction Q de cette espèce satisfait à l'équation

$$\int\int QMN\,d\omega = 0$$

pour tous les produits MN répondant à des couples quelconques n, B, on en conclut évidemment

$$\int\int Q\,d\omega\,\Sigma AMN = \int\int Q^2\,d\omega = 0, \quad \text{d'où} \quad Q = 0.$$

Il en serait de même si l'on avait

$$\int\int lQMN\,d\omega = 0.$$

ou plus généralement

$$\int\int PQMN\,d\omega = 0,$$

P étant une fonction qui ne change jamais de signe.

Il est évident aussi que l'équation

$$\Sigma AMN = \Sigma A'MN$$

entraine celle-ci

$$A = A',$$

que l'on en déduit en multipliant les deux membres par $l\,MN\,d\omega$, puis intégrant.

Mais c'est m'arrêter bien longtemps sur des propriétés que vous devinez d'avance, puisque la série ΣAMN les partage avec les séries connues de sinus et cosinus. Revenons à nos formules (A), (B), (C) et combinons-les avec notre nouveau développement pour résoudre le problème de M. Gauss relativement à la distribution sur un ellipsoïde d'une matière attractive ou répulsive d'après la loi de Newton, de telle sorte que le potentiel ait en chaque point de la surface une valeur donnée.

Soient Q cette valeur, fonction déterminée de μ, ν, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, etc., ρ' le paramètre de l'ellipsoïde, et $\lambda' d\omega'$ la masse répartie sur l'élément $d\omega'$; Δ étant la distance de $d\omega'$ à l'élément quelconque $d\omega$ qui répond au point (μ, ν), il faut qu'on ait

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q = \Sigma AMN.$$

Comme λ' est une fonction des coordonnées μ', ν' qui répondent à l'élément $d\omega'$, je pose

$$\frac{\lambda'}{l'} = \Sigma A'M'N'.$$

et par la formule (A) j'en conclus

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \sum\left(A' \cdot \frac{4\pi R'S'MN}{2n+1}\right).$$

Je mets R'S' au lieu de RS parce que ρ' est le paramètre de notre ellipsoïde. Ainsi

$$\sum\left(A' \cdot \frac{4\pi R'S'MN}{2n+1}\right) = \Sigma AMN.$$

d'ou

$$A' = \frac{(2n+1)A}{4\pi R'S'}, \quad \lambda' = \frac{l'}{4\pi}\sum\frac{(2n+1)AM'N'}{R'S'}.$$

Cette valeur de λ' s'accorde bien avec celle que j'ai donnée sans dé-

monstration dans le tome X du *Journal de Mathématiques*. Mais on fera mieux comprendre le vrai caractère général de la solution en se servant de la formule

$$\int\int \frac{l'\zeta' d\omega'}{\Delta} = m\zeta,$$

où ζ représente le produit MN, et m la quantité

$$\frac{4\pi R'S'}{2n+1},$$

qui est constante sur toute la surface (ρ').

Soient, en effet,

$$Q = \Sigma A\zeta, \quad \lambda' = l'\Sigma A'\zeta';$$

il viendra

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = \Sigma A' m\zeta = \Sigma A\zeta,$$

d'où

$$A' = \frac{\lambda}{m},$$

résultat bien simple et qui s'applique de lui-même à toute surface pour laquelle les fonctions ζ sont connues.

Puisqu'on a

$$\lambda' = \frac{l'}{4\pi}\sum \frac{(2n+1)AM'N'}{R'S'},$$

et

$$A = \frac{\int\int lQMN d\omega}{\int\int lM^2N^2 d\omega},$$

le premier terme du développement de λ', qui répond à

$$n = 0, \quad R' = 1, \quad M' = 1, \quad N' = 1, \quad S' = \int_{\rho'}^{\infty} \frac{d\rho'}{\sqrt{(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)}},$$

sera

$$\frac{l'}{4\pi}\frac{\int\int lQ d\omega}{S'\int\int l d\omega}.$$

S' représentant spécialement l'intégrale définie que je viens d'écrire. C'est de ce terme seul que dépend, comme vous le verrez sans peine,

l'intégrale

$$\iint \lambda' d\omega',$$

qui exprime la masse totale distribuée sur l'ellipsoïde. On a

$$\iint \lambda' d\omega' = \frac{\iint l Q d\omega}{4\pi S'}.$$

En ajoutant à Q une constante arbitraire C, c'est-à-dire en supposant la fonction λ' telle que

$$\iint \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q + C,$$

la même intégrale deviendrait

$$\frac{C}{S'} + \frac{\iint l Q d\omega}{4\pi S'},$$

et l'on pourrait alors disposer de C de manière que la masse de la distribution eût une valeur donnée. A peine ai-je besoin d'ajouter que le premier terme du développement de λ' serait augmenté de $\frac{l' C}{4\pi S'}$; les autres n'éprouveraient aucun changement [*].

Soit maintenant Δ la distance de l'élément $d\omega'$ à un point quelconque (ρ, μ, ν) de l'espace. Après avoir pris λ' de telle sorte que

$$\iint \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q, \quad \text{pour} \quad \rho = \rho',$$

posons

$$u = \iint \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta};$$

on aura

$$u = Q \quad \text{pour} \quad \rho = \rho', \qquad u = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = \infty,$$

et généralement

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0.$$

[*] On voit facilement aussi que la position du centre de gravité de la masse distribuée dépend des trois termes du développement de λ' qui répondent à $n = 1$; la considération de ceux qui répondent à $n = 2$ détermine ensuite les axes principaux et les moments d'inertie.

La formule

$$u = \iint \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta}$$

représente donc la loi de l'équilibre des températures, 1° dans l'intérieur de l'ellipsoïde (ρ'), la température pour les points de la surface étant définie par la fonction Q; 2° dans l'espace infini extérieur à (ρ'), avec la même fonction à la surface, et de plus la condition d'une température nulle pour $\rho = \infty$.

L'intégrale

$$u = \iint \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta}$$

représente en outre le potentiel de la distribution dont nous nous sommes occupés tout à l'heure, et peut servir à calculer l'action exercée sur le point (ρ, μ, ν). Il est donc intéressant de la développer en série.

Pour cela, développons d'abord $\frac{1}{\Delta}$. Or, si l'on pose

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma C' M' N',$$

on trouve de suite

$$C' \iint l' M'^2 N'^2 d\omega' = \iint \frac{l' M' N' d\omega'}{\Delta}.$$

On peut supprimer les accents dans l'intégrale placée au premier membre. En appliquant ensuite les formules (B) et (C), on obtient

$$C' \iint l M^2 N^2 d\omega = \frac{4\pi RS' MN}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

$$C' \iint l M^2 N^2 d\omega = \frac{4\pi R' SMN}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

De là

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\Delta} = 4\pi \sum \frac{RS' MN M' N'}{(2n+1) \iint l M^2 N^2 d\omega}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho',$$

et

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\Delta} = 4\pi \sum \frac{R' SMN M' N'}{(2n+1) \iint l M^2 N^2 d\omega}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Ces deux formules (α), (β) sont bien remarquables, et l'on en dé-

duit beaucoup de résultats curieux. On ne peut douter de la convergence des séries et de leur égalité avec le premier membre tant que ρ et ρ' ont des valeurs différentes; car la fonction $\frac{1}{\Delta}$ est alors essentiellement finie et continue. Il n'en serait plus de même si l'on posait $\rho = \rho'$.

En substituant la valeur de Δ dans celle de u, on a

$$u = 4\pi \sum \frac{RS'MN}{(2n+1)\int\int l M^2 N^2 d\omega} \int\int \lambda' M' N' d\omega', \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

Mais nous avons trouvé ci-dessus

$$\lambda' = l' \Sigma A' M' N', \quad A' = \frac{(2n+1) A}{4\pi R' S'}, \quad A = \frac{\int\int l Q M N d\omega}{\int\int l M^2 N^2 d\omega}.$$

Substituant et ayant égard à la formule

$$\int\int l' M' N' M'_1 N'_1 d\omega' = 0,$$

on obtient donc

$$u = \sum \frac{RMN \int\int l Q M N d\omega}{R' \int\int l M^2 N^2 d\omega}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

Cette formule revient à celle que M. Lamé a donnée pour l'équilibre des températures dans l'intérieur de l'ellipsoïde (ρ'). Seulement elle est écrite sous une forme plus concise. En général, l'introduction de la quantité $l d\omega$ simplifie et éclaircit beaucoup les formules; M. Lamé, qui n'en a pas fait usage, devait tomber par cela même dans des calculs plus compliqués que les nôtres. On peut remarquer que les produits RMN donnent des polynômes de degré n. La valeur de u se compose donc d'une somme de polynômes de degrés 0, 1, 2,..., n,.. successivement, dont chacun satisfait séparément à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

et il est aisé de voir en outre que chacun de ces polynômes se réduit, à la surface (ρ'), au terme Y_n, correspondant, du développement ΣY_n de la fonction Q. De cette manière on constate l'identité de la formule actuelle avec celle qui résulterait de la méthode beaucoup plus simple que j'ai donnée pour le problème de l'équilibre des températures dans l'ellipsoïde, au tome X du *Journal de Mathématiques*.

En supposant $\rho > \rho'$, des calculs semblables à ceux qui précèdent fournissent

$$u = \sum \frac{\mathrm{SMN} \int\int l \mathrm{QMN}\, d\omega}{\mathrm{S} \int\int l \mathrm{M}^2 \mathrm{N}^2\, d\omega}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Enfin le cas intermédiaire de $\rho = \rho'$ est compris à volonté dans cette formule et dans la précédente qui s'accordent à donner alors

$$u = \sum \frac{\mathrm{MN} \int\int l \mathrm{QMN}\, d\omega}{\int\int l \mathrm{M}^2 \mathrm{N}^2\, d\omega} = \mathrm{Q}.$$

Vous voyez, monsieur, comment les formules (A), (B), (C) fournissent, pour l'ellipsoïde, la solution du problème de M. Gauss et des problèmes qui s'y rattachent dans la théorie de l'attraction ou dans celle de la chaleur. Il y aurait plus d'une remarque importante à faire sur divers points relatifs aux questions qui viennent de nous occuper. Et quoique les démonstrations que vous avez déjà des formules (A), (B), (C) soient très-satisfaisantes, ce n'est pas sans regrets que je renonce à présenter encore ici un procédé nouveau pour y arriver. Ce procédé suppose connu le développement des fonctions en séries ΣAMN, ce que les précédents ne demandaient pas; mais il offre des avantages particuliers [*].

J'ai eu soin de vous faire observer que, dans un cas très-étendu et parfaitement défini, ces séries ΣAMN n'ont qu'un nombre limité de termes. On peut tirer de là quelques conséquences dont il est bon de dire un mot, tout en donnant un moyen nouveau et indépendant des formules (α), (β) de développer la valeur du potentiel, en un point (ρ, μ, ν) de l'espace, pour une couche infiniment mince comprise entre l'ellipsoïde (ρ') et une autre surface à volonté, ou mieux pour une masse attractive ou répulsive distribuée sur l'ellipsoïde. Soit lk la densité de la distribution. En conservant les notations ci-dessus, le potentiel cherché sera exprimé par

$$\int\int \frac{l' k' d\omega'}{\Delta};$$

[*] A la rigueur même, on peut, en s'aidant de lemmes préliminaires convenables, suppléer à l'usage des séries infinies.

et, en posant

$$k = \Sigma AMN,$$

il deviendra

$$\Sigma A \int\int \frac{l' M' N' d\omega}{\Delta}.$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (B) et (C),

$$4\pi \Sigma \frac{ARS' MN}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

et

$$4\pi \Sigma \frac{AR' SMN}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

Donc si k s'exprime par un nombre limité de produits MN, il en sera de même du potentiel. Or cela arrivera évidemment si k est une fonction rationnelle et entière des coordonnées x, y, z de la surface, ou du moins peut le devenir en ayant égard à l'équation de l'ellipsoïde. Cela suppose la densité de la distribution proportionnelle à la fois à cette fonction et à la quantité l, c'est-à-dire à la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan tangent mené au point dont on s'occupe.

Ces réductions d'intégrales doubles s'étendent, dans les cas analogues, aux intégrales de la forme

$$\int\int \frac{k' \cos\rho' d\omega'}{\Delta'}.$$

Au surplus, la méthode précédente serait bien mal appréciée si l'on n'y voyait qu'un moyen plus ou moins simple, plus ou moins élégant, comme on en a déjà, de ramener dans certains cas des intégrales doubles à des quadratures ou même à des quantités finies. Elle offre surtout l'immense avantage de conserver, au milieu de tous ces changements, dans le résultat final, une trace de chacun des produits MN qui a figuré dans ce que je nommerai les données primitives. Cette propriété, qui subsiste même quand la série se prolonge à l'infini, constitue le vrai caractère de nos formules, et facilite singulièrement la solution des problèmes; c'est de là aussi, vous vous le rappelez, que l'analyse de Laplace pour l'attraction des sphéroïdes très-peu différents de la sphère tire toute sa supériorité sur celle de d'Alembert. Je devrais

peut-être appliquer encore ces formules au problème de l'attraction des ellipsoïdes de densité variable d'un point à l'autre; mais ce qu'elles ajoutent aux résultats des travaux de nos grands géomètres sur ce sujet s'offrira facilement à votre pénétration. D'ailleurs, en accumulant ainsi les questions l'une sur l'autre, je crains d'être à la fois long et obscur. Excusez les négligences qui ont dû m'échapper dans une rédaction faite à la hâte; et en général lisez cette Lettre avec indulgence. Je n'ai ici personne qui puisse m'aider de ses conseils, et j'écris en grande partie de mémoire, ou du moins sur des notes fort incomplètes et déjà anciennes. C'est dans les quatre derniers mois de l'année 1842 que j'ai commencé et terminé toutes ces recherches dont je n'ai essayé de vous présenter, du reste, qu'un faible extrait, car elles composeraient facilement un volume de quelque étendue en les généralisant comme elles peuvent l'être et en réunissant les applications de nature diverse dont elles sont susceptibles. Je venais de lire le Mémoire de M. Gauss : *Théorèmes généraux sur les forces attractives*, etc.; et grâce à ce puissant secours, qui a levé pour moi les premières difficultés, mon travail a pu marcher rapidement; mais depuis cette époque je n'y ai rien ajouté d'essentiel, ou pour mieux dire je ne m'en suis plus occupé. Heureusement l'analyse que j'ai suivie étant fort simple, j'ai pu en retrouver presque tous les détails avec facilité. Les formules (A), (B), (C), par leur liaison intime avec le radical Δ, dominent, vous le voyez, cette théorie. Il était nécessaire de les rapprocher des formules connues. Mais puissiez-vous, monsieur, trouver que, dans la comparaison des fonctions Y_n et MN, je n'ai pas obscurci par d'inutiles développements ce que j'avais à cœur de rendre bien clair!

Veuillez agréer, monsieur, l'expression de mes sentiments d'estime et d'amitié.

J. LIOUVILLE.

Toul, 30 juin 1846.

SUR LA SURFACE DES ONDES;

PAR M. A. CAYLEY.

La surface des ondes est un cas particulier d'une autre surface à laquelle on peut donner le nom de *tétraédroïde*, et dont voici la propriété fondamentale :

« Le tétraédroïde est une surface du quatrième ordre, qui est » coupée par les plans d'un certain tétraèdre suivant des paires de » coniques par rapport auxquelles les trois sommets du tétraèdre dans » ce plan sont des points conjugués. De plus : les seize points d'in- » tersection des quatre paires de coniques sont des points singuliers de » la surface, c'est-à-dire des points où, au lieu d'un plan tangent, il y » a un cône tangent du second ordre. »

On verra plus loin que la surface eût été suffisamment définie en disant qu'un seul de ces points était un point singulier ; l'existence des quinze autres points singuliers est donc une propriété assez remarquable. Mais, avant d'aller plus loin, il convient de rappeler la signification des points conjugués par rapport à une conique. Cela veut dire que la polaire de chacun des trois points passe par les deux autres. Parmi les propriétés d'un tel système, on peut citer celle-ci :

« Les points d'intersection de deux coniques, par rapport aux- » quelles les mêmes trois points sont des points conjugués, sont situés » deux à deux sur six droites, lesquelles passent deux à deux par » ces trois points. »

De là : « Les quatre points singuliers compris dans chaque face du » tétraèdre sont situés deux à deux sur trois paires de droites, les- » quelles passent par les trois sommets dans cette face. »

Autrement dit, les seize points singuliers sont situés deux à deux sur vingt-quatre droites, lesquelles passent six à six par les sommets et sont

situées six à six dans les plans du tétraèdre. Donc, en considérant les six droites qui passent par le même sommet, par ces droites combinées deux à deux, il passe quinze plans, y compris trois plans du tétraèdre; en excluant ceux-ci, il y a pour chaque sommet douze plans, chacun desquels passe par quatre points singuliers; donc la courbe d'intersection d'un de ces plans avec la surface a quatre points doubles, ce qui ne peut pas arriver pour une courbe du quatrième ordre, à moins qu'elle ne se réduise à deux coniques.

Donc : « Il y a, outre les plans du tétraèdre, quarante-huit plans, » douze par chaque sommet, lesquels rencontrent la surface suivant des » paires de coniques. »

On pourrait de même chercher combien il y a de plans qui rencontrent la surface suivant des courbes avec trois points doubles, etc. Passons aux cônes circonscrits; on démontre facilement par l'analyse cette propriété :

« Les cônes circonscrits à la surface ayant pour sommets les sommets » du tétraèdre, se réduisent à des paires de cônes du second ordre, » lesquelles la touchent suivant les deux coniques de la face opposée. »

De plus : « Les seize plans qui touchent quatre à quatre à ces paires » de cônes sont des plans tangents singuliers, dont chacun touche » la surface suivant une conique. »

Il y a de plus, entre ces plans, des relations analogues à celles qui existent entre les points singuliers, de manière que l'on déduit de même le théorème :

« Il y a quarante-huit points, douze à douze dans les quatre plans » du tétraèdre, pour chacun desquels les cônes circonscrits se ré- » duisent à des paires de cônes du second ordre. »

Ajoutons que ces quarante-huit points correspondent d'une manière particulière aux quarante-huit plans, et que les cônes circonscrits touchent la surface suivant les coniques situées dans les plans correspondants.

La réciproque d'une surface du quatrième ordre est, en général, de l'ordre trente-six; mais ici, à cause des seize points singuliers, cet ordre se réduit de trente-deux, savoir, à quatre. Et les propriétés qui

viennent d'être énoncées par rapport aux cônes circonscrits montrent que la réciproque étant de cet ordre est nécessairement une surface de la même espèce ; c'est-à-dire :

« La réciproque d'un tétraédroïde est aussi un tétraédroïde. »

Donc le tétraédroïde est surface de la quatrième classe. Puisque cette surface n'a pas de lignes doubles ou de lignes de rebroussement, il n'y a pas de réduction dans le nombre qui exprime *le rang* de la surface, lequel est ainsi égal à douze, c'est-à-dire le cône circonscrit est ordinairement de l'ordre douze. Mais nous venons de voir que ce cône est seulement de la quatrième classe (en effet, la classe du cône est la même chose que celle de la surface); donc il y a réduction de cent vingt-huit dans la classe du cône. Les seize points singuliers de la surface donnent lieu à autant de lignes doubles dans le cône, ce qui effectue une réduction de trente-deux; il y a encore une réduction à effectuer de quatre-vingt-seize, qui doit avoir lieu à cause des lignes doubles ou des lignes de rebroussement du cône. En supposant qu'il y a y de celles-ci et x de celles-là (outre les seize lignes doubles dont on a fait mention), il faut que l'on ait

$$2x + 3y = 96,$$

où $x+y$ ne doit pas être plus grand que trente-neuf; mais cela ne suffit pas pour déterminer ces deux nombres.

Nous pouvons encore ajouter que les seize cônes qui touchent la surface aux points singuliers sont circonscrits, quatre à quatre, à quatre surfaces du second ordre, et que les seize courbes de contact des plans singuliers sont situées quatre à quatre sur quatre surfaces du second ordre.

Je vais donner maintenant une idée de la théorie analytique. En représentant par

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

les équations des quatre faces du tétraèdre, et par

$$U = 0$$

l'équation de la surface, U sera une fonction homogene du quatrième degré de x, y, z, w, laquelle, en faisant évanouir une quelconque des

variables, doit se diviser en deux facteurs du second degré, *fonctions paires* des trois autres variables; de plus, à cause de la condition par rapport aux points singuliers, U ne peut pas contenir de terme $xyzw$. On doit donc avoir

$$\begin{aligned} U = {} & Ax^4 + By^4 + Cz^4 + 2Fy^2z^2 + 2Gz^2x^2 + 2Hx^2y^2 \\ & + 2Lx^2w^2 + 2My^2w^2 + 2Nz^2w^2 + Pw^4, \end{aligned}$$

où il faut que les coefficients A, B, C, F, G, H, L, M, N, P aient un système inverse [*] de la forme o, o, o, o, f, g, h, l, m, n. Donc, en formant l'inverse de ce système, on obtient, toute réduction accomplie,

$$\begin{aligned} U = {} & mnfx^4 + nlgy^4 + lmhz^4 + fghw^4 \\ & - (lf - mg - nh)(ly^2z^2 + fx^2w^2) \\ & - (-lf + mg + nh)(mz^2x^2 + gy^2w^2) \\ & - (-lf - mg + nh)(nx^2y^2 + hz^2w^2) = 0. \end{aligned}$$

En effet, en écrivant

$$\begin{aligned} \lambda &= lf - mg - nh, & \mu &= -lf + mg - nh, \\ \nu &= -lf - mg + nh, & \omega &= lf + mg + nh, \\ \nabla &= l^2f^2 + m^2g^2 + n^2h^2 - 2mngh - 2nlhf - 2lmfg, \end{aligned}$$

l'équation de la courbe pourra s'écrire sous les quatre formes

$$\begin{aligned} & (2mnfx^2 - n\nu y^2 - m\mu z^2 + f\lambda w^2)^2 \\ = {} & \nabla(n^2y^4 + m^2z^4 + f^2w^4 - 2mfz^2w^2 - 2fnwz^2y^2 - 2nmy^2z^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n\nu x^2 - 2nlgy^2 + l\lambda z^2 + g\mu w^2)^2 \\ = {} & \nabla(l^2z^4 + g^2w^4 + h^2x^4 - 2gnw^2x^2 - 2nlx^2z^2 - 2lgz^2w^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (m\mu x^2 - l\lambda y^2 + 2lmhz^2 - h\nu w^2)^2 \\ = {} & \nabla(h^2w^2 + m^2x^4 + l^2y^4 - 2mlx^2y^2 - 2lhy^2w^2 - 2hmw^2x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (f\lambda x^2 - g\mu y^2 + h\nu z^2 - 2fghw^2)^2 \\ = {} & \nabla(f^2x^4 + g^2y^4 + h^2w^4 - 2ghy^2z^2 - 2hfz^2x^2 - 2fgx^2y^2); \end{aligned}$$

---

[*] En général, quand deux systèmes de quantités sont exprimés linéairement les uns au moyen des autres, on dit que les deux systèmes de coefficients sont des systèmes

ce qui met en évidence les équations des sections de la surface par les quatre plans du tétraèdre, et aussi celles des points singuliers, lesquelles sont, en effet,

$$ny \pm mz \pm fw = 0, \quad lz \pm gw \pm nx = 0,$$
$$hw \pm mx \pm ly = 0, \quad fx \pm gy \pm hz = 0.$$

Et ces plans touchent la surface suivant les courbes d'intersection avec les surfaces

$$2mnfx^2 + n\nu y^2 + m\mu z^2 + f\lambda w^2 = 0, \quad \text{etc.}, \quad \text{etc.},$$

ce qui démontre le théorème énoncé par rapport aux seize courbes de contact des plans singuliers, et de là celui pour les seize cônes tangents aux points singuliers. Pour déduire de là la forme ordinaire de l'équation de la surface des ondes, écrivons

$$l = \alpha\beta\gamma(b\gamma - c\beta), \quad m = \alpha\beta\gamma(c\alpha - a\gamma), \quad n = \alpha\beta\gamma(a\beta - b\alpha),$$
$$f = ka\alpha(b\gamma - c\beta), \quad g = kb\beta(c\alpha - a\gamma), \quad h = kc\gamma(a\beta - b\alpha),$$

équations qui suffisent pour déterminer les rapports

$$a : b : c : \alpha : \beta : \gamma : k$$

au moyen de l, m, n, f, g, h. De cette manière, l'équation de la surface se réduit à

$$\alpha\beta\gamma(ax^2 + by^2 + cz^2)(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) - ka\alpha(b\gamma + c\beta)x^2w^2$$
$$-kb\beta(c\alpha + a\gamma)y^2w^2 - kc\gamma(a\beta + b\alpha)z^2w^2 + k^2abcw^4 = 0,$$

laquelle se réduit à la surface des ondes en écrivant

$$\frac{x}{w}\sqrt{\frac{\alpha}{k}} = \xi, \quad \frac{y}{w}\sqrt{\frac{\beta}{k}} = \eta, \quad \frac{z}{w}\sqrt{\frac{\gamma}{k}} = \zeta,$$

ξ, η, ζ étant des coordonnées rectangulaires, c'est-à-dire en faisant la transformation homographique du tétraédroïde, de manière que

---

inverses; on passe facilement de là à l'idée du système inverse des coefficients d'une fonction du second ordre, et de tels systèmes se rencontrent si souvent, que l'on doit avoir un terme pour exprimer sans circonlocution cette relation.

l'un des plans du tétraèdre passe à l'infini, et que les trois autres deviennent rectangulaires. De plus, en particularisant la transformation de manière que trois des coniques d'intersection se réduisent à des cercles, cette surface rentre dans la surface des ondes. Il va sans dire que, dans le cas général, plusieurs des points ou des plans dont nous avons parlé sont nécessairement imaginaires; l'énumération de tous les cas différents aurait été d'une longueur effrayante. Il y aurait beaucoup à dire sur les cas particuliers où quelques-unes des coniques se réduisent à des paires de droites (réelles ou imaginaires). Je me contenterai d'énoncer cette propriété, très-facile à démontrer, de la surface ordinaire des ondes : au cas où $c = 0$, cette surface peut être engendrée par un cercle (ayant le centre de la surface pour centre, et dans un plan passant par l'axe des z), lequel se meut de manière à passer par la conique

$$a^2x^2 + c^2y^2 = a^2b^2.$$

On trouve, dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, tome I, page 208, la démonstration d'une autre propriété de la surface des ondes par rapport aux lignes de courbure des surfaces du second ordre.

NOTE SUR LES FONCTIONS DE M. STURM;

PAR M. A. CAYLEY.

On sait que la suite des fonctions

$$\begin{aligned} fx &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots, \\ f_1x &= \Sigma(x-b)(x-c)(x-d)\ldots, \\ f_2x &= \Sigma(a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots, \\ f_3x &= \Sigma(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(x-d)\ldots \end{aligned}$$

est de la plus grande utilité dans la théorie de la résolution numérique des équations. En effet, on obtient tout de suite à leur moyen le nombre de racines réelles comprises entre deux limites quelconques. Il était donc intéressant de chercher la manière d'exprimer ces fonctions par les coefficients de fx.

Soit, pour cela, m un nombre quelconque, pas plus grand que le degré n de cette fonction. En prenant k pour $m^{\text{ième}}$ racine de la suite a, b, c,..., et mettant, pour abréger,

$$\mathrm{P} = (-)^{\frac{1}{2}m(m-1)}(a-b)(a-c)\ldots(a-k)(b-c)\ldots(b-k)\ldots(j-k),$$

cela donne

$$f_mx : fx = \sum \frac{\mathrm{P}^2}{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)},$$

dans laquelle expression

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = {} & 1,\ a,\ldots,\ a^{m-1}, \\ & 1,\ b,\ldots,\ b^{m-1}, \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & 1,\ k,\ldots,\ k^{m-1}, \end{aligned}$$

et, de plus,

$$\frac{P}{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)} = (-)^{\frac{1}{2}m(m-1)}\left[\frac{(b-c)\ldots(b-k)\ldots(j-k)}{(x-a)} + \ldots\right],$$

dans laquelle le coefficient de x^{-r} est égal à

$$-)^{\frac{1}{2}m(m-1)}[a^{r-1}(b-c)\ldots(b-k)\ldots(j-k)-\ldots],$$

c'est-à-dire à

$$\begin{array}{l} 1,\ a,\ldots,\ a^{m-2},\ a^{r-1}, \\ 1,\ b,\ldots,\ b^{m-2},\ b^{r-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ k,\ldots,\ k^{m-2},\ k^{r-1}. \end{array}$$

Donc enfin le coefficient de x^{-r} dans $f_m x : fx$ est égal à

$$\begin{array}{l} \Sigma\ 1,\ a\ldots,\ a^{m-1} \times 1,\ a,\ldots,\ a^{m-2},\ a^{r-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ k,\ldots,\ k^{m-1} \times 1,\ k,\ldots,\ k^{m-2},\ k^{r-1}, \end{array}$$

où, au moyen d'une propriété connue des déterminants, en représentant comme à l'ordinaire par S_q la somme des $q^{\text{ièmes}}$ puissances de toutes les racines, ce coefficient devient égal à

$$\begin{array}{l} S_0,\quad S_1,\ldots,\ S_{m-2},\ S_{r-1}, \\ S_1,\quad S_2,\ldots,\ S_{m-1},\ S_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{m-1},\ S_m,\ldots,\ S_{2m-3},\ S_{r+m-2}. \end{array}$$

Et de là, en mettant $T_q = \sum \frac{a^q}{x-a}$,

$$\begin{array}{l} f_m x : fx = S_0,\quad S_1,\ldots,\ S_{m-2},\ T_0, \\ \qquad\quad S_1,\quad S_2,\ldots,\ S_{m-1},\ T_1, \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad S_{m-1},\ S_m\ldots,\ S_{2m-3},\ T_{m-1}, \end{array}$$

en multipliant par fx, et mettant

$$Q_{m,r} = S_{m+r-1} - p_1 S_{m+r-2}\ldots - (-)^r p_r S_{m-1}.$$

où l'on suppose

$$fx = x^n - p_1 x^{n-1} \ldots + (-)^n p_n,$$

cela donne

$$f_m x = \Sigma_r x^{n-m-r} \begin{matrix} S_0, & S_1, \ldots, & S_{m-2}, & Q_{m,r}, \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_{m-1}, & Q_{m+1,r}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1}, & S_m, \ldots, & S_{2m-3}, & Q_{2m-1,r}, \end{matrix}$$

où r peut ne s'étendre que depuis o jusqu'à $n - m$, puisque $f_m x$ est fonction entière. Au moyen des relations connues qui existent entre les quantités S_q, on a

$$Q_{m+s,r} = (-)^r p_{r+1} S_{m+s-2} \ldots + (-)^{n-1} p_n S_{r+m+s-n-1} \ldots [r + m + s > n],$$

$$Q_{m+s,r} = (-)^r p_{r+1} S_{m+s-2} \ldots + (-)^{r+m+s-3} p_{r+m+s-2} S_1$$
$$+ (-)^{r+m+s-2} p_{r+m+s-1} (r + m + s - 1) \ldots \left[r + m + s \overset{=}{<} n\right],$$

et de là, en posant

$$Q'_{m+s,r} = (-)^{r+m-1} p_{r+m} S_{s-1} \ldots + (-)^{n-1} p_n S_{r+m+s-n-1} [r + m + s > n].$$

$$Q'_{m+s,r} = (-)^{r+m-1} p_{r+m} S_{s-1} \ldots + (-)^{r+m+s-3} p_{r+m+s-2} S_1$$
$$+ (-)^{r+m+s-2} p_{r+m+s-1} (r + m + s - n - 1) \ldots \left[r + m + s \overset{=}{<} n\right].$$

on peut, par les propriétés des déterminants, réduire $Q_{m+s,r}$ à $Q'_{m+s,r}$ dans l'expression de $f_m x$. Nous avons donc exprimé cette fonction au moyen des coefficients $p_1, p_2, \ldots$ et des sommes $S_1, S_2, \ldots, S_{2m-3}$, lesquelles s'expriment facilement par ces mêmes coefficients (et pour calculer $f_1 x, f_2 x, \ldots, f_n x$, on aurait seulement besoin de calculer ces sommes une fois pour toutes jusqu'à S_{2n-3}); il serait donc facile de former des tables de ces fonctions, pour les équations d'un degré quelconque, ce qui pourrait à peine s'effectuer d'aucune autre manière.

Sur les surfaces dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

C'est un géomètre français, l'illustre Monge, qui le premier a donné l'intégrale de l'équation aux différences partielles appartenant aux surfaces dont les rayons de courbure sont égaux, et de signes contraires. Monge a trouvé que ce genre de surface peut être représenté par le système des équations

$$(1)\quad \begin{cases} x = u + v, \\ y = \varphi(u) + \psi(v), \\ z = \sqrt{-1}\left[\int\sqrt{1+(\varphi' u)^2}\,du + \int\sqrt{1+(\psi' v)^2}\,dv\right], \end{cases}$$

ou $\varphi(u)$, $\psi(v)$ sont des fonctions arbitraires des quantités indépendantes u et v. En adoptant les notations habituelles des coefficients à différentielles partielles, et n'écrivant que les caractéristiques des fonctions arbitraires, nous aurons, en désignant par R la quantité $1 + \varphi'\psi' - \sqrt{(1+\varphi'^2)(1+\psi'^2)}$,

$$p = \frac{\sqrt{-1}}{\psi'-\varphi'}\left(\psi'\sqrt{1+\varphi'^2} - \varphi'\sqrt{1+\psi'^2}\right),$$

$$q = \frac{\sqrt{-1}}{\psi'-\varphi'}\left(\sqrt{1+\psi'^2} - \sqrt{1+\varphi'^2}\right),$$

$$r = \frac{R\sqrt{-1}}{(\psi'-\varphi')^3}\left(\frac{\psi'^2\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} - \frac{\varphi'^2\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right),$$

$$s = -\frac{R\sqrt{-1}}{(\psi'-\varphi')^3}\left(\frac{\psi'\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} - \frac{\varphi'\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right),$$

$$t = \frac{R\sqrt{-1}}{(\psi'-\varphi')^3}\left(\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} - \frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right),$$

$$1 + p^2 = -\frac{2R\varphi'\psi'}{(\psi'-\varphi')^2},\quad pq = \frac{R(\varphi'+\psi')}{(\psi'-\varphi')^2},\quad 1 + q^2 = -\frac{2R}{(\psi'-\varphi')^2}.$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes dans l'équation des lignes de courbure, savoir,

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left[(1+q^2)s-pqt\right]+\frac{dy}{dx}\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]$$
$$-\left[(1+p^2)s-pqr\right]=0,$$

on obtiendra, en négligeant les facteurs communs,

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left(\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}+\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right)-2\frac{dy}{dx}\left(\frac{\psi'\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}+\frac{\varphi'\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right)$$
$$+\frac{\psi'^2\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}+\frac{\varphi'^2\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}=0.$$

ou

$$\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\left(\frac{dy}{dx}-\psi'\right)^2+\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\left(\frac{dy}{dx}-\varphi'\right)^2=0.$$

Mais on a, par le système des équations (1),

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'du+\psi'dv}{du+dv}.$$

Donc

$$\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi''}}du^2+\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}dv^2=0.$$

Ainsi les équations des lignes de courbure se trouveront déterminées par le système des équations (1) et par l'équation suivante :

$$(2)\qquad \int\frac{\sqrt{\varphi''}}{\sqrt[4]{1+\varphi'^2}}du\pm\sqrt{-1}\int\frac{\sqrt{\psi''}}{\sqrt[4]{1+\psi'^2}}dv=c.$$

Si l'on voulait calculer le rayon de courbure d'une section normale de la surface, il faudrait se rappeler l'expression

$$\rho=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\left[1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\frac{dy^2}{dx^2}\right]}{r+2s\frac{dy}{dx}+t\frac{dy^2}{dx^2}}\,[*].$$

---

[*] Voyez *Analyse appliquée à la géométrie de trois dimensions*, par C.-F.-A. Leroy, page 265.

et par la substitution des valeurs de p, q, r, s, t déjà données, il viendrait

$$\rho = -\frac{2R\left(\frac{dy}{dx}-\varphi'\right)\left(\frac{dy}{dx}-\psi'\right)}{\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\left(\frac{dy}{dx}-\psi'\right)^2-\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\left(\frac{dy}{dx}-\varphi'\right)^2}.$$

ou

$$\rho = \frac{2R\frac{du}{dv}}{\frac{\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\cdot\frac{du^2}{dv^2}-\frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}}.$$

Nous nommerons *génératrices* de la surface les courbes telles que les rayons de courbure des sections normales qui passent par leurs tangentes aient une valeur infinie. D'après cette définition, on voit avec facilité que leurs équations seront données par le système (1) et par l'équation

$$(3)\qquad \int\frac{\sqrt{\varphi''}}{\sqrt[4]{1+\varphi'^2}}\,du \pm \int\frac{\sqrt{\psi''}}{\sqrt[4]{1+\psi'^2}}\,dv = c.$$

Si deux courbes situées sur la surface passent par le même point, cherchons l'angle qu'elles forment entre elles. Pour cela, supposons que les courbes sont déterminées respectivement par les équations différentielles

$$du = P\,dv, \quad du = P'\,dv;$$

et soient α, β, γ, α', β', γ' les angles que les tangentes menées aux courbes par le point de leur intersection forment avec les axes coordonnés. On aura donc

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{1+P}{\sqrt{2RP}},$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{P\varphi'+\psi'}{\sqrt{2RP}}.$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\sqrt{-1}\left(P\sqrt{1+\varphi'^2}+\sqrt{1+\psi'^2}\right)}{\sqrt{2RP}},$$

et, pareillement,

$$\cos\alpha' = \frac{1+P'}{\sqrt{2RP'}}, \quad \cos\beta' = \frac{P'\varphi' + \psi'}{\sqrt{2RP'}}, \quad \cos\gamma' = \frac{\sqrt{-1}\,P'\sqrt{1+\varphi'^2} + \sqrt{1+\psi'^2}}{\sqrt{2RP}}.$$

et si l'on désigne par λ l'angle cherché, on a

$$\cos\lambda = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

d'où

$$\cos\lambda = \frac{P+P'}{2\sqrt{PP'}},$$

ou

$$\operatorname{tang}\lambda = \sqrt{-1}\cdot\frac{P-P'}{P+P'}.$$

Il suit de là que les *génératrices* qui passent par un point se coupent à angle droit, et forment avec les lignes de courbure qui passent par le même point un angle égal à 45 degrés, ce qui s'accorde bien avec la théorie qui a été donnée par M. Dupin dans ses *Développements de Géométrie*. En effet, les *génératrices* sont telles, qu'en chacun de leurs points elles ont pour tangente l'asymptote de l'hyperbole *indicatrice*, qui, dans le cas que nous considérons, est équilatère partout [*]. En général, l'équation du système des courbes qui coupent, sous un angle donné (λ), toutes les courbes auxquelles appartient l'équation différentielle

$$du = P\,dv,$$

sera

$$du = (\cos 2\lambda \pm \sqrt{-1}\sin 2\lambda)\,P\,dv.$$

On parvient à l'expression de l'aire de la surface en fonction de u et v en remplaçant, dans la formule

$$S = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

---

[*] Il est bon d'observer que les courbes que nous avons nommées *les génératrices* sont appelées par M. Dupin *les lignes asymptotiques*. (Voyez les *Développements de Géométrie*, page 189.)

$\sqrt{1+p^2+q^2}$ par $\frac{R\sqrt{-1}}{\psi'-\varphi'}$, et $dx\,dy$ par $(\psi'-\varphi')\,du\,dv$; on aura donc

$$S = \sqrt{-1}\iint R\,du\,dv, \tag{4}$$

ou bien, en se rappelant la valeur de R,

$$S = \sqrt{-1}\left(\int du\int dv + \int \varphi' du \int \psi' dv - \int \sqrt{1+\varphi'^2}\,du \int \sqrt{1+\psi'^2}\,dv\right).$$

Le système des équations (1) fait connaître une propriété de la surface qui a été remarquée par Lagrange, savoir, que, dans ce système, la fonction $\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ est une différentielle exacte. En effet, si l'on transforme cette fonction en fonction de u et v, on trouve

$$\frac{p\,dy - q\,dx}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \sqrt{1+\varphi'^2}\,du - \sqrt{1+\psi'^2}\,dv.$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Il s'agit de particulariser les fonctions φ et ψ, d'après la condition que la surface est réglée ou engendrée par une droite. Les équations de cette droite seront

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta,$$

α étant un paramètre variable, et β, γ, δ représentant des fonctions de ce paramètre. Je vais montrer que le paramètre α peut s'exprimer avec simplicité en fonction des quantités u et v.

Puisque

$$y - \alpha x = f(\alpha),$$

on a

$$\frac{d(y-\alpha x)}{du}\frac{d\alpha}{dv} = \frac{d(y-\alpha x)}{dv}\frac{d\alpha}{du},$$

ce qui donne

$$(\varphi' - \alpha)\frac{d\alpha}{dv} = (\psi' - \alpha)\frac{d\alpha}{du};$$

mais, en considérant sur la droite deux points infiniment voisins, on a

$$\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'\frac{du}{dv} + \psi'}{1 + \frac{du}{dv}};$$

en déduisant la valeur de $\frac{du}{dv}$ de l'équation (3), et en posant

$$P = \frac{\sqrt{\varphi''}}{\sqrt[4]{1+\varphi'^2}}, \quad Q = \frac{\sqrt{\psi''}}{\sqrt[4]{1+\psi'^2}},$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dv} = \frac{Q}{P},$$

on a donc

$$(5) \qquad \alpha = \frac{Q\varphi' + P\psi'}{P+Q};$$

par suite, il viendra

$$(6) \qquad Q\frac{d\alpha}{du} + P\frac{d\alpha}{dv} = 0.$$

Si l'on déduit les valeurs de $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\alpha}{dv}$ de l'équation (5), et que l'on substitue dans l'équation (6), on aura

$$Q^2\left[\varphi''(P+Q) + \frac{dP}{du}(\psi' - \varphi')\right] + P^2\left[\psi''(P+Q) - \frac{dQ}{dv}(\psi' - \varphi')\right] = 0,$$

ou

$$(P+Q)(Q^2\varphi'' + P^2\psi'') = (\psi' - \varphi')\left(P^2\frac{dQ}{dv} - Q^2\frac{dP}{du}\right).$$

Mais cette dernière, en se rappelant les valeurs des quantités P, Q, peut s'écrire sous la forme

$$(P+Q)\left(\frac{Q^2\varphi'\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} + \frac{P^2\psi'\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right) = (\sqrt{1+\psi'^2} - \sqrt{1+\varphi'^2})\left(P^2\frac{dQ}{dv} - Q^2\frac{dP}{du}\right),$$

ou

$$Q\frac{d\gamma}{du} + P\frac{d\gamma}{dv} = 0,$$

en vertu de l'équation

$$\gamma = \frac{dz}{dx} = \sqrt{-1}\,\frac{Q\sqrt{1+\varphi'^2} + P\sqrt{1+\psi'^2}}{P+Q}.$$

Il s'ensuit donc que les équations (5), (6) expriment que β, γ, δ sont fonctions du paramètre α, et par l'équation (6) on a

$$(7) \qquad \alpha = F\left(\int P\,du - \int Q\,dv\right).$$

En vertu des équations (5), (7), nous aurons

$$\frac{Q\varphi' + P\psi'}{P + Q} = F\left(\int P\,du - \int Q\,dv\right),$$

et, en éliminant la fonction F, on déduit

$$\frac{(P + Q)\varphi'' + \dfrac{dP}{du}(\psi' - \varphi')}{(P + Q)\psi'' - \dfrac{dQ}{dv}(\psi' - \varphi')} = -\frac{P^2}{Q^2},$$

ou

$$\frac{P + Q + \dfrac{dP}{d\varphi'}(\psi' - \varphi')}{P + Q - \dfrac{dQ}{d\psi'}(\psi' - \varphi')} = -\frac{\sqrt{1+\psi'^2}}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

d'où

$$\frac{dP}{d\varphi'} + (P + Q)\left(\frac{\sqrt{1+\varphi'^2} + \sqrt{1+\psi'^2}}{(\psi' - \varphi')\sqrt{1+\varphi'^2}}\right) = \frac{dQ}{d\psi'}\cdot\frac{\sqrt{1+\psi'^2}}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

Cette dernière, étant intégrée par rapport à P et φ', donne

$$(8)\qquad P + Q - (\psi' - \varphi')\frac{dQ}{d\psi'} = \frac{\left[1 + \varphi'\psi' - \sqrt{(1+\varphi'^2)(1+\psi'^2)}\right]\left[Q + f(\psi')\right]}{1+\psi'^2},$$

en mettant la quantité introduite par intégration sous la forme $f(\psi')$. En intégrant ensuite par rapport à Q et ψ', on a aussi

$$(9)\qquad P + Q + (\psi' - \varphi')\frac{dP}{d\varphi'} = \frac{\left[1 + \varphi'\psi' - \sqrt{(1+\varphi'^2)(1+\psi'^2)}\right]\left[P + f_1(\varphi')\right]}{1+\varphi'^2}.$$

En différentiant les équations (8), (9) respectivement par rapport à φ' et ψ', on trouve

$$(10)\qquad \frac{dP}{d\varphi'} + \frac{dQ}{d\psi'} = \frac{Q + f(\psi')}{1+\psi'^2}\left(\frac{\psi'\sqrt{1+\varphi'^2} - \varphi'\sqrt{1+\psi'^2}}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\right),$$

$$(11)\qquad \frac{dP}{d\varphi'} + \frac{dQ}{d\psi'} = \frac{P + f_1(\varphi')}{1+\varphi'^2}\left(\frac{\varphi'\sqrt{1+\psi'^2} - \psi'\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right),$$

d'où

$$\frac{Q + f(\psi')}{\sqrt{1+\psi'^2}} = -\frac{P + f_1(\varphi')}{\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

Mais, à cause de l'indépendance de u et v, cette égalité ne peut subsister qu'autant que chaque membre se réduira à une même constante. Représentons-la donc par $C\sqrt{-1}$, et nous aurons ainsi, en différentiant les équations (10), (11) respectivement par rapport à φ' et ψ',

$$\frac{d^2P}{d\varphi'^2} = -\frac{C\sqrt{-1}}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2Q}{d\psi'^2} = \frac{C\sqrt{-1}}{(1+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$P = A + B\varphi' - C\sqrt{-1}.\sqrt{1+\varphi'^2}, \tag{12}$$

$$Q = A' + B'\psi' + C\sqrt{-1}.\sqrt{1+\psi'^2}. \tag{13}$$

En substituant les valeurs de $\frac{dP}{d\varphi'}$, $\frac{dQ}{d\psi'}$, déduites de ces dernières, dans l'une ou l'autre des équations (10), (11), on obtient

$$B + B' = 0,$$

et pareillement, en vertu des équations (8), (9), on a

$$A + A' = 0.$$

On voit donc que les équations (12), (13) peuvent être écrites sous la forme

$$P = A + B\varphi' - C\sqrt{-1}.\sqrt{1+\varphi'^2},$$

$$Q = C\sqrt{-1}.\sqrt{1+\psi'^2} - A - B\psi',$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{g + h\varphi' - \sqrt{-1}.\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{-1}.\sqrt{1+\psi'^2} - g - h\psi'}, \tag{14}$$

en posant

$$\frac{A}{C} = g, \quad \frac{B}{C} = h.$$

Il est facile de démontrer que la droite qui engendre la surface demeure toujours parallèle à un plan donné. En effet, l'équation de toutes les sections de la surface parallèles au plan dont l'équation est

$$z = gx + hy$$

sera

$$\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{-1}.\sqrt{1+\psi'^2} - g - h\psi'}{g + h\varphi' - \sqrt{-1}.\sqrt{1+\varphi'^2}}.$$

Mais, à cause de la formule (14), cette équation est identique avec celle des *génératrices* (3).

Nous regarderons le plan *directeur* comme étant le plan des x, y, ce qui donne

$$g = 0, \quad h = 0;$$

on trouve donc

$$\frac{\sqrt{\varphi''}\cdot\sqrt{1+\psi'^2}}{\sqrt{\psi''}\cdot\sqrt{1+\varphi'^2}} = -\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{1+\psi'^2}},$$

ou

$$\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il faudra donc que les quantités $\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}$ aient la même valeur constante. Posons-la égale à $c\sqrt{-1}$, ce qui donne

$$\varphi = \frac{\sqrt{-1}}{c}\sqrt{1+c^2u^2}, \quad \psi = \frac{\sqrt{-1}}{c}\sqrt{1+c^2v^2}.$$

Nous n'ajouterons pas les constantes introduites par ces dernières intégrations, parce qu'on peut toujours les anéantir en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes. En vertu des valeurs que nous avons trouvées pour φ et ψ, le système des équations (1) deviendra en posant $c = 1$, ce qui ne diminuera pas la généralité du résultat)

$$(15)\quad \begin{cases} x = u + v, \\ y = \sqrt{-1}\,(\sqrt{1+u^2} - \sqrt{1+v^2}), \\ z = \sqrt{-1}\,\left[\log(u + \sqrt{1+u^2}) + \log(v + \sqrt{1+v^2})\right]. \end{cases}$$

Pour arriver à l'équation de la surface en x, y, z, en éliminant les quantités u et v entre les trois dernières équations (15), nous poserons

$$u = \sqrt{-1}\sin\lambda, \quad v = \sqrt{-1}\sin\mu;$$

nous aurons donc

$$(16)\quad \begin{cases} x = \sqrt{-1}\,(\sin\lambda + \sin\mu), \\ y = \sqrt{-1}\,(\cos\lambda + \cos\mu), \\ z = -(\lambda + \mu), \end{cases}$$

d'où l'on tire enfin

$$\frac{z}{2} = -\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}\frac{x}{y}\right).$$

Cette dernière équation appartient à un héliçoïde à plan directeur. Cette propriété de l'héliçoïde a été démontrée pour la première fois par M. E. Catalan dans le tome VII de ce Journal, page 211.

Je vais appliquer la formule (2) à la détermination des lignes de courbure de l'héliçoïde. En vertu des valeurs de φ et ψ déjà trouvées, l'équation (2) devient

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \pm \sqrt{-1}.\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = 0;$$

en intégrant et employant les quantités λ, μ, on aura donc

$$\lambda \pm \sqrt{-1}\,\mu = A \pm \sqrt{-1}\,B,$$

ou

$$(17) \qquad \lambda + \mu - (A + B) = \pm\sqrt{-1}\,[A - B - (\lambda - \mu)].$$

Posons

$$x = r\sin\omega, \quad y = r\cos\omega,$$

d'où, par les équations (16),

$$(18) \qquad r = 2\sqrt{-1}\cos\frac{\lambda-\mu}{2}, \quad \omega = \frac{\lambda+\mu}{2}.$$

Si nous combinons ces dernières avec l'équation (17), en posant

$$A + B = 2\alpha, \quad A - B = \pi,$$

pour faire disparaître les imaginaires, nous trouverons

$$\pm r = \varepsilon^{(\omega-\alpha)} - \varepsilon^{-(\omega-\alpha)}$$

pour l'équation des lignes de courbure. Cette équation a été donnée aussi par M. Catalan, dans le XXIXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 143.

Il s'agit de déterminer l'aire de l'héliçoïde. Pour cela, la formule (4) donne, en faisant usage des quantités λ, μ,

$$S = \sqrt{-1}\iint[1 - \cos(\lambda - \mu)]\,d\lambda\,d\mu.$$

Si l'on voulait évaluer la portion de l'aire engendrée par une longueur constante de la génératrice terminée à l'axe des z, il faudra poser

$$\lambda + \mu = \xi, \quad \lambda - \mu = \eta,$$

ce qui changera la dernière intégrale dans la suivante :

$$S = \frac{\sqrt{-1}}{2} \int_0^\alpha \int_0^\xi (1 - \cos\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

ce qui donnera

$$(19) \qquad S = \frac{\alpha\sqrt{-1}}{2} (\beta - \sin\beta).$$

Si l'on désigne par a la longueur constante de la génératrice, et par θ l'angle entre ses positions extrêmes, on aura, par les équations (18),

$$a = 2\sqrt{-1}\cos\frac{\beta}{2}, \quad \theta = \frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$\sqrt{-1}.\beta = \log\left(\frac{a\sqrt{4-a^2} - 2 - a^2}{2}\right), \quad \sqrt{-1}\sin\beta = \frac{a\sqrt{4-a^2}}{2};$$

et par ces valeurs, l'équation (19) se trouvera transformée en

$$S = \theta\left[\log\left(\frac{a\sqrt{4+a^2} - 2 - a^2}{2}\right) - \frac{a\sqrt{4+a^2}}{2}\right].$$

Si le système des équations (1) représente une surface de révolution, cherchons les formes des fonctions φ et ψ. Pour cela, prenons pour l'axe de révolution l'axe des z, et, attendu que les sections de la surface parallèles au plan des x, y sont les lignes de courbure, l'équation

$$dz = 0$$

équivaut à l'équation (2), en adoptant l'un des signes ambigus ; d'où l'on déduit

$$\frac{1+\psi'^2}{1-\varphi'^2} = -\frac{\psi''\sqrt{1-\varphi'^2}}{\varphi''\sqrt{1+\psi'^2}},$$

ou

$$\frac{\varphi''}{1+\varphi'^2} = -\frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Et, par une analyse semblable à celle que nous avons déjà employée, on trouvera que, pour une surface de révolution, le système des équations (1) deviendra

$$(20)\qquad \begin{cases} x = u + v, \\ y = \sqrt{1-u^2} - \sqrt{1-v^2}, \\ z = -\sqrt{-1}\,[\operatorname{arc}(\cos u) + \operatorname{arc}(\cos v)]. \end{cases}$$

Pour éliminer les quantités u et v entre ces dernières, nous poserons

$$u = \cos\lambda, \quad v = \cos\mu,$$

d'où nous aurons

$$(21)\qquad \begin{cases} x = \cos\lambda + \cos\mu, \\ y = \sin\lambda - \sin\mu, \\ z = -\sqrt{-1}\,(\lambda + \mu), \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(22)\qquad \frac{z}{2} = -\log\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2-4}}{2}\right).$$

Cette surface est produite par une chaînette tournant autour de sa *directrice* [*].

Pour trouver l'équation des *génératrices* de la surface, nous renverrons à l'équation (3), qui, en ayant égard aux équations (20), devient

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \pm \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = 0,$$

d'où, en introduisant les quantités λ, μ et intégrant ensuite, nous conclurons

$$\lambda \pm \sqrt{-1}\,\mu = A \pm \sqrt{-1}\,B,$$

ou

$$\lambda - \mu - (A - B) = \pm\sqrt{-1}\,[A + B - (\lambda + \mu)].$$

[*] Cet exemple a été donné par M. de Morgan dans son ouvrage intitulé *Differential and integral calculus with elementary illustrationes*.

Posons donc

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega;$$

on a, par les équations (21),

$$(23) \qquad \sqrt{r^2 - 4} = 2\sqrt{-1}\,\sin\frac{\lambda+\mu}{2}, \quad \omega = \frac{\lambda-\mu}{2}.$$

et, en prenant

$$A + B = 0, \quad A - B = 2\alpha,$$

on déduit, pour l'équation cherchée,

$$\pm\sqrt{r^2 - 4} = \varepsilon^{(\omega-\alpha)\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-(\omega-\alpha)\sqrt{-1}},$$

ou

$$r = \varepsilon^{(\omega-\alpha)\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-(\omega-\alpha)\sqrt{-1}}.$$

Pour terminer ces applications, nous allons chercher l'expression de l'aire de la surface représentée par l'équation (22). Pour une zone de la surface terminée par le plan des x, y et un plan parallèle, la formule (4) donne, en employant les quantités λ, μ,

$$S = 4\sqrt{-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\alpha}^{\alpha}[1 - \cos(\lambda - \mu)]\,d\lambda\,d\mu.$$

d'où

$$(24) \qquad S = 2\pi\sqrt{-1}\,(\alpha - \sin\alpha).$$

Mais, à cause des formules (23), on a

$$r = 2\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \sqrt{r^2 - 4} = 2\sqrt{-1}\,\sin\frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$\sqrt{-1}.\alpha = 2\log\left(\frac{r + \sqrt{r^2-4}}{2}\right), \quad \sqrt{-1}\,\sin\alpha = \frac{r\sqrt{r^2-4}}{2},$$

et, par ces valeurs, la formule (24) deviendra

$$S = 2\pi\left[2\log\left(\frac{r + \sqrt{r^2-4}}{2}\right) - \frac{r\sqrt{r^2-4}}{2}\right],$$

ce qui coïncide avec le résultat des formules ordinaires.

NOTE

Sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables;

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

Le théorème sur la convergence de la série qu'on obtient en développant une fonction $f(x)$ de la variable réelle ou imaginaire x suivant les puissances entières et ascendantes de cette variable, se trouve énoncé pour la première fois dans le Mémoire que j'ai publié à Turin en 1832, Mémoire dont la première partie a pour objet spécial le nouveau calcul auquel j'ai donné le nom de *calcul des limites*. On lit, en effet, dans ce Mémoire, les lignes que je vais transcrire :

« *La fonction $f(x)$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction $f(x)$ cesse d'être finie et continue.* Ainsi, en particulier, puisque les fonctions

$$\cos x, \quad \sin x, \quad e^x, \quad e^{x^2}, \quad \cos(1 - x^2 \ldots$$

» ne cessent jamais d'être finies et continues, ces fonctions seront toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x.

» Au contraire, les fonctions

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{1 - x}, \quad \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}},$$

» qui, lorsqu'on attribue à x une valeur imaginaire de la forme » $Xe^{p\sqrt{-1}}$, cessent d'être fonctions continues de x au moment où le

» module X devient égal à 1, seront certainement développables en » séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de » la variable x, si la valeur réelle ou imaginaire de x offre un module » inférieur à l'unité; mais elles pourront devenir et deviendront, en » effet, divergentes, si le module de x surpasse l'unité. Enfin, comme » les fonctions

$$e^{\frac{1}{x}}, \quad e^{\frac{1}{x^2}}, \quad \cos\frac{1}{x}, \cdots$$

» deviennent discontinues pour une valeur nulle de x, par conséquent, » lorsque le module de x est le plus petit possible, elles ne seront jamais » développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances » ascendantes de x. »

Dans le théorème énoncé, les fonctions sont envisagées sous le rapport de la *continuité*. Donc, lorsqu'on veut appliquer le théorème, il est d'abord nécessaire de savoir en quoi consiste la continuité, pour des fonctions de variables réelles ou imaginaires.

La continuité des fonctions de variables réelles forme précisément l'objet du second paragraphe du chapitre II de mon *Analyse algébrique;* elle s'y trouve définie dans les termes suivants :

« Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour » chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette » fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en » partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à » la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-» même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha) - f(x),$$

» qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la va-» leur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites » assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, » pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur » numérique de la différence

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

» décroît indéfiniment avec α. En d'autres termes, *la fonction* $f(x)$ *res-*

» *tera continue par rapport à x entre les limites données, si entre ces* » *limites un accroissement infiniment petit de la variable produit tou-* » *jours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

» On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une » valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de » cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites » de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

» Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voi- » sinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle de- » vient alors *discontinue*, et qu'il y a, pour cette valeur particulière, » *solution de continuité.* »

Ainsi, en résumé, *supposons que, dans la fonction $f(x)$, on fasse varier x par degrés insensibles en attribuant à cette variable une série de valeurs infiniment rapprochées les unes des autres. La fonction $f(x)$ restera continue pour toutes ces valeurs de x, si, pour chacune d'elles, elle acquiert constamment une valeur unique et finie, et si d'ailleurs un accroissement infiniment petit attribué à l'une quelconque de ces valeurs de x produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

Énoncée en ces termes, la définition des fonctions continues n'est pas seulement applicable au cas où x reste réel. On pourra l'appliquer encore, sans difficulté, au cas même où x devient imaginaire, en observant qu'il est naturel de définir les expressions imaginaires infiniment petites, comme je l'ai fait dans l'analyse algébrique, c'est-à-dire dans les termes suivants :

« Une expression imaginaire variable est appelée *infiniment petite,* » lorsqu'elle converge vers la limite zéro; ce qui suppose que, dans » l'expression donnée, la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ conver- » gent en même temps vers cette limite. Cela posé, représentons par

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

» une expression imaginaire variable, α, β désignant deux quantités » réelles, auxquelles on peut substituer le module ρ et l'arc réel θ. » Pour que cette expression soit infiniment petite, il sera évidemment » nécessaire et suffisant que son module ρ soit lui-même infiniment » petit. »

Ces principes étant admis, soit r le module d'une variable imaginaire x, dans laquelle x désigne la partie réelle et y le coefficient de $\sqrt{-1}$. Cette variable pourra être présentée, non-seulement sous la forme

$$x = \mathrm{x} + \mathrm{y}\sqrt{-1}, \tag{1}$$

mais encore sous la forme

$$x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$x = re^{\theta\sqrt{-1}}, \tag{3}$$

θ étant un arc réel que nous appellerons l'*argument*, et les variables réelles

$$\mathrm{x},\quad \mathrm{y},\quad \theta,\quad r$$

étant liées entre elles par les formules

$$\mathrm{x} = r\cos\theta,\quad \mathrm{y} = r\sin\theta. \tag{4}$$

En vertu de ces mêmes formules, desquelles on tirera

$$r = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}.$$

le module r sera complétement déterminé, mais l'argument θ admettra une infinité de valeurs exprimées par les divers termes d'une progression arithmétique dont la raison sera la circonférence 2π. On pourra d'ailleurs concevoir que x, y représentent les coordonnées rectangulaires, et θ, r les coordonnées polaires d'un point mobile P assujetti à ne pas sortir d'un plan donné. Alors, à chaque valeur donnée de la variable imaginaire x, correspondra une position déterminée du point mobile P; et il suffira, comme l'on sait, de faire varier, d'une part, le rayon vecteur r entre les limites $r = 0$, $r = \infty$; d'autre part, l'angle polaire p entre les limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, ou bien encore entre les limites $\theta = -\pi$, $\theta = +\pi$, pour obtenir successivement toutes les positions possibles du point mobile, par conséquent toutes les valeurs possibles de la variable x. Admettons, pour fixer les idées, que l'argument p varie entre les limites $-\pi$, $+\pi$. Alors, si l'on suppose successivement

$$\theta = \pi - \varepsilon,\quad \text{puis}\quad \theta = -(\pi - \varepsilon),$$

ε désignant une quantité positive infiniment petite, on trouvera, dans la première hypothèse,

$$x = -r\cos\varepsilon, \quad y = r\sin\varepsilon,$$
$$x = -re^{-\varepsilon\sqrt{-1}};$$

et, dans la seconde hypothèse,

$$x = -r\cos\varepsilon, \quad y = -r\sin\varepsilon,$$
$$x = -re^{\varepsilon\sqrt{-1}}.$$

Par suite, la valeur de x restera la même dans les deux hypothèses, et dans le passage de l'une à l'autre, la variable y, toujours sensiblement nulle, variera infiniment peu, ainsi que la variable imaginaire x, qui restera toujours très-peu différente de $-r$. Cela posé, en vertu de ce qui a été dit plus haut, la fonction $f(x)$ de la variable imaginaire x ne pourra rester fonction continue de x, dans le voisinage de la valeur particulière $x = -r$, qu'autant qu'elle variera elle-même infiniment peu quand on passera de la supposition $\theta = \pi - \varepsilon$ à la supposition $\theta = -(\pi - \varepsilon)$, ε étant aussi rapproché de zéro que l'on voudra; ce qu'on peut exprimer encore en disant que la fonction $f(x)$ ne pourra rester fonction continue de x, dans le voisinage de la valeur particulière $x = -r$, si elle ne reprend pas la même valeur, quand l'argument θ passe de la valeur π à la valeur $-\pi$.

Ces conclusions s'accordent avec les observations que j'ai eu soin de faire, dans un précédent Mémoire sur les fonctions continues. (*Voir* les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, et, en particulier, la séance du 22 juin 1844.) En effet, dans ce Mémoire, après avoir rappelé le théorème sur la convergence des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables, j'ajoutais :

« Comme cette dernière proposition peut recevoir un grand nombre » d'applications utiles, il importe de la bien préciser, et d'entrer à ce » sujet dans quelques détails.

» Considérons une variable imaginaire x. Elle sera le produit de » son module par une certaine exponentielle trigonométrique; et, pour » obtenir toutes les valeurs de la variable correspondantes à un mo- » dule donné, il suffira de faire croître l'argument de cette variable,

c'est-à-dire l'argument de l'exponentielle trigonométrique, depuis » la limite zéro jusqu'à une circonférence entière 2π, ou, ce qui » revient au même, depuis la limite $-\pi$ jusqu'à la limite $+\pi$. Si, » tandis que l'argument varie entre ces limites, et le module entre » deux limites données, une fonction réelle ou imaginaire de x reste » continue par rapport à l'argument et au module, de manière à re- » prendre la même valeur quand l'argument passe de la limite $-\pi$ à » la limite π, cette fonction sera, entre les limites assignées au mo- » dule, ce que nous appelons une fonction continue de la variable. »

Dans une Note que renferme le présent volume (pages 129 et suiv.), M. Ernest Lamarle, après avoir rappelé le théorème qui fait l'objet du présent article, dit que, dans ce théorème, la condition de continuité est *insuffisante, à moins qu'elle n'implique une certaine périodicité de la fonction*. Il remarque, ensuite, que si la fonction

$$f(re^{\theta\sqrt{-1}}),$$

liée aux deux fonctions réelles

$$\varphi(r, \theta), \quad \psi(r, \theta),$$

par une équation symbolique de la forme

$$f(re^{\theta\sqrt{-1}}) = \varphi(r, \theta) - \sqrt{-1}\,\psi(r, \theta),$$

est développable en série convergente suivant la formule de Maclaurin, on aura nécessairement

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi), \quad \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi);$$

puis il ajoute :

« Voilà donc une condition nouvelle reconnue tout d'abord in- » dispensable. Elle consiste en ce que les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ sont » assujetties à reprendre les mêmes valeurs aux deux limites $\theta = 0$, » $\theta = 2\pi$. Réduite à ces termes, elle n'offre rien de surabondant et » qui ne soit essentiellement distinct des caractères propres à la conti- » nuité. »

On voit que la condition ici énoncée par M. Lamarle est précisément celle que j'ai signalée moi-même dans le *Compte rendu* de la séance du 22 juin 1844, non pas comme distincte de la condition de

continuité, mais comme renfermée dans cette dernière. Si M. Lamarle, en écrivant sa Note, avait eu sous les yeux ce *Compte rendu*, spécialement le passage cité du Mémoire sur les fonctions continues, et s'il avait rapproché ce passage des principes exposés dans mon *Analyse algébrique*, il se serait certainement borné à dire que, *dans le théorème en question, la condition de continuité est la seule qu'on doive mentionner, et que cette condition implique une certaine périodicité de la fonction.*

Au reste, dire que, *dans le théorème dont il s'agit, la condition de continuité est la seule qu'on doive mentionner*, c'est dire seulement que *la fonction $f(x)$ sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction cesse d'être finie et continue.* Mais je suis loin d'admettre que la discontinuité de la fonction entraîne toujours la divergence du développement, et que l'on puisse dire, avec M. Lamarle (page 137 de ce volume) :

« Toute fonction est développable en série convergente suivant la » formule de Maclaurin, tant que le module de la variable reste » moindre que la plus petite des valeurs pour laquelle la fonction » cesse d'être continue, ou de prendre la même valeur aux deux li- » mites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. *Hors de là la série devient divergente.* »

J'ai précisément émis l'opinion contraire à celle qu'énonce ici M. Lamarle, dans un précédent Mémoire, où je me suis spécialement occupé *des fonctions dont les développements restent convergents, tandis qu'elles deviennent discontinues.* M. Lamarle lui-même ne pourra révoquer en doute l'existence de fonctions qui présentent ce double caractère. Il me suffira de prendre pour exemple la fonction même qu'il a choisie comme propre à montrer une application du théorème général, savoir,

$$(1 + x^2)^m,$$

et de considérer spécialement le cas où, le module r de x étant inférieur à l'unité, l'exposant m devient fractionnaire et de la forme $\frac{p}{q}$, p, q étant des nombres entiers.

On ne pourrait, sans introduire une étrange confusion dans le calcul,

représenter par la même notation

$$x^{\frac{p}{q}}$$

toutes les valeurs de y propres à vérifier l'équation

$$y^q = x^p,$$

dans le cas où la variable

$$x = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}$$

devient imaginaire, et l'on est bien libre assurément d'appliquer, avec M. Lamarle, la notation

$$x^{\frac{p}{q}}$$

à celle des valeurs de y qu'on tire de la formule

$$y = \rho^{\frac{p}{q}}\left(\cos\frac{p}{q}\theta + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}\theta\right),$$

en y supposant θ compris entre les limites $0, 2\pi$. Admettons pour l'instant cette hypothèse, et, après avoir ainsi fixé, dans tous les cas possibles, la valeur de la fonction

$$x^{\frac{p}{q}},$$

ou, en d'autres termes, le sens qui devra être attaché à la notation $x^{\frac{p}{q}}$, posons, comme l'a fait M. Lamarle,

$$(5) \qquad 1 + r\cos\theta = \rho\cos\alpha, \quad r\sin\theta = \rho\sin\alpha,$$

en supposant ρ positif. On aura non-seulement

$$(6) \qquad \rho = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\theta},$$

mais encore, en assujettissant l'argument α à demeurer compris entre les limites $0, 2\pi$, et en posant $m = \frac{p}{q}$,

$$(7) \qquad (1 + x)^m = (1 + re^{\theta\sqrt{-1}})^m = \rho^m(\cos m\alpha + \sqrt{-1}\sin m\alpha).$$

Supposons maintenant que, le module r étant inférieur à l'unité, on

attribue successivement à x deux valeurs très-voisines de la valeur particulière

$$x = -r,$$

et que ces deux valeurs soient respectivement

$$(8) \qquad x = -re^{-\varepsilon\sqrt{-1}}, \quad x = -re^{\varepsilon\sqrt{-1}},$$

ε étant un nombre infiniment petit. Les valeurs de θ correspondantes à ces deux valeurs de x seront respectivement

$$(9) \qquad \theta = \pi - \varepsilon, \quad \theta = \pi + \varepsilon.$$

D'ailleurs les formules (5) donneront, 1° pour $\theta = \pi - \varepsilon$,

$$(10) \qquad 1 - r\cos\varepsilon = \rho\cos\alpha, \quad r\sin\varepsilon = \rho\sin\alpha;$$

2° pour $\theta = \pi + \varepsilon$,

$$(11) \qquad 1 - r\cos\varepsilon = \rho\cos\alpha, \quad r\sin\varepsilon = -\rho\sin\alpha.$$

On aura donc, dans l'un et l'autre cas,

$$\cos\alpha = \frac{1 - r\cos\varepsilon}{\rho} > 0.$$

mais comme, dans le passage du premier cas au second, $\sin\alpha$ passera du positif au négatif en restant infiniment petit, il est clair que l'argument α, renfermé entre les limites 0, 2π, offrira, dans le premier cas, une valeur très-voisine de zéro; dans le second cas, une valeur très-voisine de 2π. Donc, si le module r de x est inférieur à l'unité, les deux valeurs de la fonction

$$(1 + x)^m.$$

qui correspondront aux deux valeurs infiniment voisines de x fournies par les équations (8), et, par conséquent, aux valeurs infiniment voisines de θ, fournies par les équations (9), se réduiront sensiblement aux deux valeurs qu'acquiert l'expression

$$\rho^m(\cos m\alpha + \sqrt{-1}\sin m\alpha) = \rho^m e^{m\alpha\sqrt{-1}}$$

quand on y pose successivement $\alpha = 0$ et $\alpha = 2\pi$, c'est-à-dire à ρ^m et à $\rho^m e^{2m\pi\sqrt{-1}}$. Donc la différence entre ces deux valeurs de la fonction

$1 + x)^m$ ne pourra s'évanouir que dans le cas où l'exposant m sera entier. Dans tout autre cas, la différence entre ces deux valeurs étant, non pas infiniment petite, mais finie, la fonction $(1 + x)^m$ cessera d'être une fonction continue de x et même de θ, quand x acquerra une valeur réelle et négative, et offrira, pour une telle valeur, ce qu'on nomme une solution de continuité.

Donc, si l'on attribue à la notation $x^{\frac{p}{q}}$ le sens que lui a donné M. Lamarle, la fonction

$$(1 + x)^{\frac{p}{q}}$$

deviendra discontinue pour un module de x inférieur à l'unité; et la convergence de son développement, dans le cas où l'on aura $r < 1$, sera due, contrairement à la proposition énoncée par M. Lamarle, non plus à son caractère de fonction toujours continue, qui aura disparu, comme on vient de le voir, mais à une circonstance particulière, savoir, à l'évanouissement de la somme que j'ai désignée par Δ dans mon Mémoire sur la substitution des fonctions non périodiques aux fonctions périodiques. (*Voir* les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 10 juin 1844.)

La fonction $(1 + x)^m$ reprendra, pour un module de x inférieur à l'unité, le caractère de fonction toujours continue, et, par conséquent, le théorème qui fait l'objet de cet article lui sera immédiatement applicable, si l'on attache à la notation x^m, pour le cas où m cesse d'être entier, le sens que je lui ai donné dans mon *Analyse algébrique*, en supposant que dans la formule

$$x^m = r^m (\cos m\theta + \sqrt{-1} \sin m\theta),$$

θ varie entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$. On pourra même sans inconvénient généraliser cette convention et faire varier l'argument θ depuis la limite $-\pi$ jusqu'à la limite $+\pi$, pourvu qu'on ne lui permette jamais d'atteindre la limite inférieure à $-\pi$, mais seulement de s'en approcher indéfiniment. Dans l'une et l'autre hypothèse, aux deux valeurs de x, déterminées par les équations (8), répondront, en vertu des formules (10) et (11), des valeurs de α sensiblement nulles, et, par conséquent, des valeurs de $(1 + x)^m$ dont la différence sera infiniment

petite, aussi bien que la différence entre les deux valeurs assignées à la variable x.

Comme je l'ai remarqué dans mon *Analyse algébrique* (chap. VIII), « lorsque les constantes ou variables comprises dans une fonction » donnée, après avoir été supposées réelles, sont ensuite supposées » imaginaires, la notation à l'aide de laquelle on exprimait la fonction » dont il s'agit ne peut être conservée dans le calcul qu'en vertu de » conventions nouvelles, propres à fixer le sens de cette notation dans » la dernière hypothèse. » D'après ce qu'on vient de voir, la nature des conventions a une influence marquée sur le caractère des fonctions considérées comme continues; de sorte qu'en passant d'un système de conventions à un autre, on peut rendre discontinues des fonctions qui étaient continues, et réciproquement. D'après cette remarque, il n'y a pas lieu de s'étonner que les développements de certaines fonctions restent convergents, dans le cas où ces fonctions deviennent discontinues, puisqu'en modifiant les conventions admises, on peut quelquefois enlever à une fonction dont le développement était convergent le caractère de continuité. Pour rendre plus souvent applicable le théorème sur la convergence des développements, il est évidemment utile d'adopter les conventions qui conservent ce caractère le plus longtemps possible aux fonctions employées dans le calcul.

Cherchons à fixer, d'après ce principe, le sens qu'il serait bon d'attacher aux deux notations

$$\mathrm{l}(x), \quad x^m,$$

la lettre l indiquant un logarithme népérien, et m un exposant quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, réel ou imaginaire. Il est d'abord évident que, si l'on convient d'étendre à des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires, de x et de m la formule

$$x^m = e^{m\mathrm{l}x}, \tag{12}$$

qu'il est facile d'établir quand x et m sont réels, x étant positif, la question se trouvera réduite à la recherche de l'expression imaginaire qu'on devra représenter par $\mathrm{l}(x)$. Or, la variable x étant imaginaire et déterminée par l'équation (3), les divers logarithmes népé-

riens de x seront les diverses valeurs de y, propres à vérifier la formule

$$e^y = x,$$

et ces diverses valeurs seront celles que fournit l'équation

$$y = \mathrm{l}(r) + \theta\sqrt{-1},$$

dans laquelle $\mathrm{l}(r)$ désigne le logarithme népérien et réel du module r, quand on attribue successivement à l'argument θ toutes les valeurs qu'il peut recevoir. Mais les calculs n'offriraient plus rien de précis, si l'on représentait par la seule notation $\mathrm{l}(x)$ ces diverses valeurs. Il importe donc de choisir l'une d'entre elles, pour lui appliquer cette notation. D'ailleurs, la variable

$$x = re^{p\sqrt{-1}}$$

pourra successivement acquérir toutes les valeurs possibles, si l'on fait varier le module r entre les limites $r = 0$, $r = \infty$, et l'argument p entre les limites

$$p = \varphi - \pi, \quad p = \varphi + \pi,$$

φ désignant un angle fini quelconque, en excluant même une de ces limites. Donc le sens de la notation $\mathrm{l}(x)$ se trouvera complétement fixé pour chaque valeur de x, si l'on prend

$$\mathrm{l}(x) = \mathrm{l}(r) + \theta\sqrt{-1}, \tag{13}$$

en supposant que l'argument p varie entre les limites $\varphi - \pi$, $\varphi + \pi$, sans pouvoir jamais atteindre une de ces deux limites. D'autre part, comme dans le cas où x est réel et positif, on est convenu de représenter par $\mathrm{l}(x)$ le logarithme réel de x, il faudra que, dans l'équation (13), θ se réduise à zéro quand x sera réduit à r; par conséquent, il faudra que la valeur zéro de l'argument θ soit comprise entre les limites $\varphi - \pi$, $\varphi + \pi$. Cette dernière condition se trouve remplie lorsqu'on suppose $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, c'est-à-dire lorsqu'on fait varier θ de 0 à 2π, en excluant la limite supérieure 2π, ou de $-\pi$ à $+\pi$, en excluant la limite inférieure $-\pi$; ou même plus généralement lorsqu'on attribue à l'angle φ une valeur comprise entre les limites 0, π, en excluant l'une des deux limites de θ.

Entre les trois suppositions que nous venons d'indiquer, les deux premières sont les plus simples, et l'on pourrait être tenté de choisir la première, comme l'a fait M. Lamarle. Mais il importe d'observer qu'alors les fonctions

$$\mathrm{l}(x), \quad x^m$$

cesseraient d'être continues dans le voisinage de valeurs réelles et positives de x, ce qui ne serait pas sans inconvénient. Il en résulterait, par exemple, que, pour des valeurs du module r inférieures à l'unité, les deux fonctions

$$\mathrm{l}(1+x), \quad (1+x)^m$$

ne seraient plus des fonctions toujours continues de x et de θ, comme dans le cas où l'on pose $\varphi = 0$. Au contraire, lorsqu'on adopte la seconde supposition, c'est-à-dire lorsqu'on fait varier θ depuis la limite $-\pi$ exclusivement jusqu'à la limite π inclusivement, les deux expressions

$$\mathrm{l}(1+x), \quad (1+x)^m$$

restent fonctions continues de x, pour toute valeur du module r inférieure à l'unité. En effet, posons

$$(14) \qquad 1 + re^{\theta\sqrt{-1}} = \rho e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

l'argument α étant assujetti, comme l'argument θ, à varier entre la limite $-\pi$ et la limite π sans jamais atteindre la limite inférieure. On aura, comme ci-dessus,

$$1 + r\cos\theta = \rho\cos\alpha, \quad r\sin\theta = \rho\sin\alpha;$$

par conséquent,

$$\cos\alpha = \frac{1 + r\cos\theta}{\rho} > 0, \quad \sin\alpha = \frac{r}{\rho}\sin\theta,$$

et, tandis que l'argument θ variera entre les limites $-\pi$, $+\pi$, en passant par la valeur zéro, l'argument α, toujours compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, puisque son cosinus sera positif, variera, avec x, par degrés insensibles, et passera de la valeur zéro à la valeur $-\operatorname{arc}\sin r$

puis reviendra de celle-ci à la valeur zéro, puis, ensuite, passera de la valeur zéro à la valeur arc sin r, puis, enfin, reviendra de celle-ci à la valeur zéro, c'est-à-dire à sa valeur primitive. D'ailleurs, α variant avec x, comme on vient de le voir, par degrés insensibles, et le module

$$\rho = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\theta}$$

jouissant évidemment de la même propriété, il est clair que les fonctions $\mathrm{l}(1+x)$, $(1+x)^m$, dont les valeurs seront déterminées par les équations

$$\mathrm{l}(1+x) = \mathrm{l}(\rho) + \alpha\sqrt{-1},$$

$$(1+x)^m = e^{m\mathrm{l}(1+x)} = \rho^m e^{m\alpha\sqrt{-1}},$$

seront, pour $r < 1$, des fonctions continues de la variable imaginaire x.

Eu égard à ces considérations, il paraît convenable de fixer le sens des deux notations

$$\mathrm{l}(x), \quad x^m,$$

à l'aide des formules (12), (13), ou, ce qui revient au même, à l'aide de la formule (13) et de la suivante:

$$x^m = r^m e^{m\theta\sqrt{-1}}, \tag{15}$$

en assujettissant l'argument θ de x à varier depuis la limite $-\pi$ exclusivement jusqu'à la limite π inclusivement [*].

En reproduisant, dans les *Exercices d'Analyse*, le théorème sur la convergence du développement de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, j'ai mentionné, comme condition de con-

---

[*] Depuis la rédaction de cet article, en parcourant le Mémoire que M. Björling a publié sur le développement d'une puissance quelconque réelle ou imaginaire d'un binôme, j'ai trouvé, au bas d'une page, une note où il est dit que cet auteur a présenté à l'Académie d'Upsal une Dissertation sur l'utilité qu'il peut y avoir à conserver dans le calcul les deux notations x^a, $\mathrm{l}(x)$, dans le cas même où la partie réelle de x est négative. M. Björling verra que, sur ce point, je suis d'accord avec lui; il reste à savoir si les conventions auxquelles il aura eu recours, pour fixer complétement, dans tous les cas, le sens des notations x^a, $\mathrm{l}(x)$, sont exactement celles que j'ai adoptées moi-même; et, pour le savoir, je suis obligé d'attendre qu'il me soit possible de connaître la Dissertation dont il s'agit.

vergence, non-seulement la continuité de $f(x)$, comme je l'avais fait en 1832, mais encore la continuité de $f'(x)$. Toutefois, une remarque de M. Liouville ayant ramené mon attention sur cet objet, m'a engagé à l'examiner de nouveau dans un Mémoire sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus et sur la théorie des intégrales singulières. (*Voir* les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* séance du 16 décembre 1844.) On trouve, en effet, dans ce Mémoire, le passage suivant :

« J'observerai que j'ai déduit constamment les divers théorèmes » précédemment rappelés (ceux qui sont relatifs au résidu intégral » d'une fonction), et les théorèmes analogues, d'un principe fonda- » mental établi dans mes Mémoires de 1814 et de 1822. Comme je l'ai » reconnu dans ces Mémoires, la différence entre les deux valeurs » d'une intégrale double, dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ peut » s'intégrer en termes finis par rapport à l'une quelconque des deux » variables que l'on considère, se trouve exprimée par une intégrale » définie singulière. Ce principe unique suffit pour montrer que, » dans le théorème relatif au développement des fonctions en séries, » on pourrait à la rigueur se passer de la considération des fonctions » dérivées. Il en résulte donc, conformément à l'observation judicieuse » que M. Liouville me faisait dernièrement à cet égard, qu'entre les » deux énoncés du théorème, donnés dans mon Mémoire de 1831, et » dans mes *Exercices d'Analyse,* il semblerait convenable de choisir » le premier. Toutefois, lorsqu'il s'agit du développement des fonc- » tions en séries, la considération des fonctions dérivées me paraît ne » devoir pas être entièrement abandonnée, attendu que très-souvent, » comme je l'ai dit ailleurs, cette considération est précisément celle » qui sert à déterminer les modules des séries. »

Évidemment, M. Lamarle n'a point connu ce passage puisqu'il ne le cite point, quoiqu'il reproduise la remarque, qu'on peut omettre la condition de continuité en ce qui concerne la dérivée.

Avant de terminer cet article, je ferai encore une remarque. La démonstration que j'ai donnée du théorème dans le Mémoire qui a pour titre : *Considérations nouvelles sur le théorème des suites et sur les lois de leur convergence* (tome Ier des *Exercices d'Analyse,* pages 269 et

suivantes) repose sur l'établissement de quelques équations qui, réduites à des formules de calcul intégral par la réduction de certains accroissements supposés très-petits à la limite zéro, fournissent, quand on se sert des notations ci-dessus admises, les résultats suivants.

La formule (1) du § Ier du Mémoire cité donne

$$(16)\qquad \int_0^{2\pi} e^{\theta\sqrt{-1}} f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{D}_r f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = 0.$$

Les formules (6), (8), (10) du même paragraphe donnent

$$(17)\qquad \mathrm{D}_r \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{D}_r f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta,$$

$$(18)\qquad \mathrm{D}_r \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = 0,$$

$$(19)\qquad \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta = \text{constante}.$$

Or les formules (16), (17), (18), (19) sont précisément les équations fondamentales desquelles M. Lamarle a déduit aussi la démonstration du théorème. (*Voir* les pages 132 et 133 du présent volume.)

J'observerai, en finissant, que la démonstration du théorème énoncé pourrait encore se déduire de la formule générale établie pour l'intégration des différentielles exactes dans mes *Leçons sur le calcul infinitésimal*. En vertu de cette formule, si l'on pose

$$(20)\qquad du = \varphi(x, y, z, \ldots)\, dx + \chi(x, y, z, \ldots)\, dy + \psi(x, y, z, \ldots)\, dz + \ldots,$$

les expressions

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \quad \chi(x, y, z, \ldots), \quad \psi(x, y, z, \ldots), \ldots$$

étant des fonctions x, y, z,... continues, du moins entre certaines limites, et choisies de manière que le second membre de la formule (14) satisfasse aux conditions d'intégrabilité, et si d'ailleurs on assujettit la fonction u à s'évanouir pour certaines valeurs

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \ldots$$

de

$$x, \quad y, \quad z, \ldots,$$

respectivement comprises entre les limites dont il s'agit, on aura, comme il est facile de le prouver,

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z, \ldots)\, dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y, z, \ldots)\, dy$$
$$+ \int_{z_0}^{z} \psi(x_0, y_0, z, \ldots)\, dz + \ldots.$$

Or, cette formule devant subsister quand on échangera entre elles les variables $x, y, z, \ldots$, fournira, par suite, plusieurs valeurs de u, qui, dans l'hypothèse admise, devront être égales entre elles. On aura, par exemple, si les variables $x, y, z, \ldots$ se réduisent à deux,

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y)\, dy = \int_{y_0}^{y} \chi(x, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\, dx,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{x_0}^{x} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{y} [\chi(x, y) - \chi(x_0, y)]\, dy;$$

puis, en nommant x, y des valeurs particulières de x, y comprises, comme x_0, y_0, entre les limites entre lesquelles les fonctions

$$\varphi(x, y), \quad \chi(x, y)$$

restent continues, on trouvera

$$(21) \qquad \int_{x_0}^{x} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{y} [\chi(x, y) - \chi(x_0, y)]\, dy.$$

Si, maintenant, on remplace x et y par d'autres variables r, θ, liées à une variable imaginaire x par l'équation (2), et la différentielle

$$\varphi(x, y)\, dx + \chi(x, y)\, dy$$

par l'expression

$$f(re^{\theta\sqrt{-1}})\, d(re^{\theta\sqrt{-1}}) = e^{\theta\sqrt{-1}} f(re^{\theta\sqrt{-1}}) [dr + r\, d\theta \sqrt{-1}],$$

les fonctions

$$\varphi(x, y), \quad \chi(x, y)$$

se trouveront remplacées par les suivantes :

$$e^{\theta\sqrt{-1}} f(re^{\theta\sqrt{-1}}), \quad re^{\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\, f(re^{\theta\sqrt{-1}}).$$

Supposons d'ailleurs que

$$f(x) = f(re^{\theta\sqrt{-1}})$$

reste toujours fonction continue de x pour des valeurs de r comprises entre les limites

$$r = r_0, \quad r = R,$$

et prenons $-\pi$, $+\pi$ pour limites de l'argument θ. On tirera de la formule (21)

$$(22) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\theta\sqrt{-1}} \left[R f(Re^{\theta\sqrt{-1}}) - r_0 f(r_0 e^{\theta\sqrt{-1}}) \right] d\theta = 0.$$

Enfin, si l'on pose $r_0 = 0$ dans la formule (16), elle donnera

$$(23) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} z f(z)\, dp = 0,$$

la valeur de z étant

$$z = Re^{\theta\sqrt{-1}}.$$

L'équation (23) suppose seulement que la fonction $f(z)$ reste continue entre les limites 0 et R du module de z. Si, dans cette même équation, on remplace $f(z)$ par $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$, alors, en supposant le module r de x inférieur au module R de z, on trouvera

$$(24) \qquad f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{z}{z-x} f(z)\, d\theta;$$

puis, en développant le rapport $\frac{z}{z-x}$ suivant les puissances ascendantes de x, on obtiendra la formule de Maclaurin, qui subsistera, ainsi que la formule (24), tant que le module de x conservera une valeur inférieure à celle par laquelle la fonction $f(x)$ cessera d'être finie et continue.

SUR LES ARCS A DIFFÉRENCE RECTIFIABLE

ET LES ZONES A DIFFÉRENCE PLANIFIABLE;

PAR M. LEBESGUE.

I. — *Arcs à différence rectifiable.*

Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires. Soit

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} i,$$

d'où

$$x = \varphi(i), \quad ds = \frac{dx}{\cos i},$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad s = \left(\frac{x}{\cos i}\right)_{i_0}^{I} - \int_{i_0}^{I} \varphi(i)\, d\left(\frac{1}{\cos i}\right),$$

l'intégrale et la fonction $\frac{x}{\cos i}$ étant prises entre les limites i_0 et I, qui répondent aux extrémités de l'arc.

Si l'on pose

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang} i', \quad y = \varphi(i'),$$

on aura de même

$$(2) \qquad s' = \left(\frac{y}{\cos i'}\right)_{i'_0}^{I'} - \int_{i'_0}^{I'} \psi(i')\, d\left(\frac{1}{\cos i'}\right).$$

Nous appellerons associés deux arcs donnés par les formules (1) et (2), et qui soient tels, qu'une relation donnée entre i et i',

$$(3) \qquad F(i, i') = 0,$$

rende égales entre elles les intégrales définies des équations (1) et (2), de sorte que la différence des arcs s et s' sera rectifiable, car $\frac{x}{\cos i}$, $\frac{y}{\cos i'}$ sont des segments de tangente.

Exemple. Pour l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, la formule (1) devient

$$s = \left[\frac{a \operatorname{tang} i (a^2 + a^2 \operatorname{tang}^2 i)}{\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 i + b^2}\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 i + a^2}}\right]_{i_0}^{i} - \int_{i_0}^{i} \frac{(a \operatorname{tang} i)^2 d.a \operatorname{tang} i}{\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 i + b^2}\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 i + a^2}};$$

on a de même

$$s' = \left[\frac{b \operatorname{tang} i' (b^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 i')}{\sqrt{b^2 \operatorname{tang}^2 i' + a^2}\sqrt{b^2 \operatorname{tang}^2 i' + b^2}}\right]_{i'_0}^{i'} - \int_{i'_0}^{i'} \frac{(b \operatorname{tang} i')^2 . d.b \operatorname{tang} i')}{\sqrt{b^2 \operatorname{tang}^2 i' + a^2}\sqrt{b^2 \operatorname{tang}^2 i' + b^2}}.$$

Si l'on pose la relation

$$a \operatorname{tang} i = b \operatorname{tang} i' \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tang} i}{b} = \frac{\operatorname{tang} i'}{a},$$

les arcs sont associés, et leur différence rectifiable. Si l'on fait $i = 0$, d'où $i' = 0$, l'arc s a son origine au sommet B: soient x, y les coordonnées de son autre extrémité; l'arc s' a son origine au sommet A: soient x_1, y_1 les coordonnées de son autre extrémité; la condition d'association devient

$$a^4 - a^2(x^2 + x_1^2) + e^2x^2x_1^2 = 0, \quad (a^2e^2 = a^2 - b^2),$$

et la différence des arcs devient $e^2 \cdot \frac{x\xi}{a}$. On a précisément le théorème de Fagnano.

II. — *Zones à différence planifiable.*

Je donnerai le nom de *parallèle* au lieu des points d'une surface pour lesquels la normale fait un angle constant i, avec une droite fixe, qui sera l'axe du parallèle. Ainsi, une surface rapportée à trois axes rectangulaires, étant représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

pour avoir les équations d'un parallèle dont l'axe fasse, avec les axes des coordonnées, les angles α, β, γ, il suffit de prendre le système d'équations

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$\cos^2 i = \left(\cos\alpha \frac{df}{dx} + \cos\beta \frac{df}{dy} + \cos\gamma \frac{df}{dz}\right)^2 \left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right].$$

Pour le cas où l'axe du parallèle se confondrait avec celui des z, on aurait

$$f(x, y, z) = 0, \quad \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 = \left(\frac{df}{dz}\right)^2 \tang^2 i.$$

Comme on peut dire que pour chaque point d'un parallèle, le plan tangent fait le même angle avec un plan perpendiculaire à l'axe, on reconnaît de suite que si l'on projette orthogonalement un parallèle sur un plan perpendiculaire à l'axe, et que l'aire interceptée par cette projection soit $\omega = f(i)$, i étant pour le parallèle l'inclinaison de la normale sur l'axe, l'aire Ω de la zone comprise entre deux parallèles relatifs aux angles i_0 et I sera

$$(4) \qquad \Omega = \int_{i_0}^{\mathrm{I}} \frac{d\omega}{\cos i} = \left(\frac{\omega}{\cos i}\right)_{i_0}^{\mathrm{I}} - \int_{i_0}^{\mathrm{I}} \omega d. \left(\frac{1}{\cos i}\right).$$

Je ferai de nombreuses applications de cette formule dans un Mémoire sur les parallèles et les méridiens des surfaces du second degré. Je m'en servirai ici pour étendre le théorème de Fagnano à l'ellipsoïde.

Pour l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on trouve, pour la projection d'un parallèle dont l'axe est celui des z,

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\tang^2 i}{c^2}\right) x^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{\tang^2 i}{c^2}\right) y^2 = \frac{\tang^2 i}{c^2};$$

de là on tire

$$\omega = \pi \cdot \frac{\dfrac{\tang^2 i}{c^2}}{\dfrac{1}{ab} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{\tang^2 i}{c^2}} \sqrt{\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{\tang^2 i}{c^2}}},$$

et la formule (3) devient

$$\Omega = \left[\frac{\pi \cdot \dfrac{\tang^2 i}{c^2}\left(\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{\tang^2 i}{c^2}\right)}{\dfrac{1}{abc}\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{\tang^2 i}{c^2}}\sqrt{\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{\tang^2 i}{c^2}}\sqrt{\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{\tang^2 i}{c^2}}}\right]_{i_0}^{\mathrm{I}}$$

$$- \int_{i_0}^{\mathrm{I}} \frac{\pi \cdot \dfrac{\tang i}{c} \cdot d \cdot \left(\dfrac{\tang i}{c}\right)}{\dfrac{1}{abc}\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{\tang^2 i}{c^2}}\sqrt{\dfrac{1}{b^2} + \dfrac{\tang^2 i}{c^2}}\sqrt{\dfrac{1}{c^2} + \dfrac{\tang^2 i}{c^2}}},$$

ou bien, en représentant le dénominateur par D,

$$\Omega = \left[\frac{\pi}{D}\cdot\frac{\tang^2 i}{c^2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{\tang^2 i}{c^2}\right)\right]_{i_0}^{I} - \int_{i_0}^{I}\frac{\pi}{D}\,\frac{\tang i}{c}\,d\cdot\left(\frac{\tang i}{c}\right).$$

Si l'on calcule les formules analogues, en prenant les axes des y et celui des x successivement pour axes des parallèles, on aura, D devenant D′ et D″, et i devenant i' et i'' successivement,

$$\Omega' = \left[\frac{\pi}{D'}\,\frac{\tang^2 i'}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\tang^2 i'}{b^2}\right)\right]_{i'_0}^{I'} - \int_{i'_0}^{I'}\frac{\pi}{D'}\,\frac{\tang i'}{b}\,d\cdot\left(\frac{\tang i'}{b}\right).$$

$$\Omega'' = \left[\frac{\pi}{D''}\,\frac{\tang^2 i''}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\tang^2 i''}{a^2}\right)\right]_{i''_0}^{I''} - \int_{i''_0}^{I''}\frac{\pi}{D''}\,\frac{\tang i''}{a}\,d\cdot\left(\frac{\tang i''}{a}\right).$$

Si l'on pose

$$\frac{\tang i}{c} = \frac{\tang i'}{b},$$

les zones Ω, Ω' seront dites associées, la partie représentée par l'intégrale définie étant la même.

Si l'on fait

$$i = 0, \quad \text{d'où} \quad i' = 0,$$

la différence des zones sera (on suppose $a > b > c$)

$$\Omega - \Omega' = \frac{\pi}{D}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\frac{\tang^2 i}{c^2}.$$

Si l'on pose

$$\frac{\tang i}{c} = \frac{\tang i'}{b} = \frac{1}{d},$$

cette différence prendra la forme

$$\frac{\pi a^2 b^2 c^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)d}{\sqrt{a^2+d^2}\sqrt{b^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\pi a^2\sqrt{b^2-c^2}\,d}{\sqrt{a^2+d^2}\sqrt{b^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2}}.$$

On voit que, si l'on posait

$$\frac{\tang i}{c} = \frac{\tang i'}{b} = \frac{\tang i''}{a} = \frac{1}{d},$$

on aurait trois zones associées deux à deux, et dont les différences

seraient proportionnelles aux quantités

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}, \quad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}.$$

Dans ce cas, les trois parallèles qui limitent ces zones à une base seraient les traces d'un ellipsoïde intérieur ayant pour équation

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2}\right)x^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2}\right)y^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\right)z^2 = \frac{1}{d^2},$$

et au moyen des sections principales duquel on construirait très-simplement les différences des zones associées.

En rendant nul un des axes de l'ellipsoïde, on retrouverait le théorème de Fagnano.

J'ajouterai, en finissant, qu'il me paraît probable que les théorèmes de M. Chasles sur les arcs coniques à différence rectifiable peuvent s'étendre aux surfaces du second degré, et fournir des zones à différence planifiable. Cette extension mérite, je crois, de fixer l'attention de cet éminent géomètre. Ce que je pourrai trouver à ce sujet aura sa place dans le Mémoire indiqué plus haut.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

« Bordeaux, le 25 juin 1846.

» ..... Un de mes collègues vous remettra sous peu une Note relative à la théorie des nombres, et la partie d'un Mémoire sur les surfaces du second degré, qui traite des parallèles qui ont pour axe un des axes principaux de la surface. C'est le cas le plus simple et le seul jusqu'ici qui m'ait conduit à quelque résultat remarquable. Vous avez vu, monsieur, par ma dernière Note, que j'appelle *parallèle d'une surface* le lieu des points de cette surface pour lesquels la normale fait un angle constant avec une droite fixe nommée *axe du parallèle*. La considération des parallèles facilite surtout la quadrature des surfaces du second degré. On parvient ainsi en quelques lignes à la formule de Legendre pour l'ellipsoïde, et l'on reconnaît, pour l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à une nappe, l'existence d'un théorème analogue à celui de Fagnano sur les arcs d'ellipse. Quant aux théorèmes plus généraux de M. Chasles, vos dernières recherches sur les lignes géodésiques des surfaces du second degré me font douter que leur extension dépende de la théorie des parallèles. Je vous ferai remarquer, monsieur, que le théorème de M. Joachimsthal, dont on vous doit une démonstration géométrique [*] peut s'énoncer ainsi :

« Toute ligne de courbure plane est un parallèle dont l'axe est per-
» pendiculaire au plan de la courbe. »

[*] *Voir* page 87 du present volume. Je profiterai de l'occasion pour ajouter la remarque suivante à l'article cité par M. Lebesgue. Il est prouvé, dans cet article, que : « le long d'une ligne de courbure quelconque, la variation infiniment petite qu'éprouve » l'angle compris entre le plan tangent à la surface et le plan osculateur de la courbe, » quand on passe d'un point à un autre point infiniment voisin, est toujours égale :

» Voici une propriété curieuse des directrices :

« Pour l'hyperboloïde à une nappe et pour le paraboloïde hyper-
» bolique, les plans menés par les directrices des sections principales
» et perpendiculairement à leurs plans, sont des parallèles. »

» Il y a un théorème analogue pour l'hyperboloïde à deux nappes.

» J'ajouterai encore que l'aire S d'un segment elliptique

$$2a\beta x^2 = \beta y^2 + \alpha z^2.$$

déterminé par le plan $x = a$, est donnée par la formule

$$S = \frac{8a\sqrt{2a\beta}}{n\sqrt{n}}\left[1 - n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.\Delta - (1 - n^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1 - n\sin^2\varphi)\Delta}\right].$$

où l'on suppose

$$\alpha > \beta, \quad n = \frac{2a}{2a + \alpha}, \quad k^2 = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right).n, \quad \Delta = \sqrt{1 - k^2.\sin^2\varphi}.$$

» La fonction elliptique complete de troisieme espece peut être éliminée par une formule de Legendre. »

» l'angle que forment entre eux les plans osculateurs relatifs à ces deux points. » Cela posé, admettons qu'une ligne de courbure soit en même temps une ligne géodésique; l'angle du plan tangent à la surface avec le plan osculateur de la courbe sera constamment droit : sa variation étant nulle, les plans osculateurs successifs feront entre eux des angles nuls; la courbe sera donc plane. Ce dernier théorème est dû à M. Jacobi (tome II de ce Journal, page 149). Il est curieux de le retrouver ici. J. LIOUVILLE.)

REMARQUES SUR L'ÉQUATION

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0;$$

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

1. Si $y = v$ satisfait à l'équation

$$(1) \qquad y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0,$$

$y = x^m . v'$ satisfera à l'équation

$$(2) \qquad y'' - \frac{m}{x} y' + ny = 0.$$

Plus généralement, si $y = v$ satisfait à l'équation

$$y'' + \mathrm{P}y' + ny = 0,$$

$y = v' . e^{\int \mathrm{P} dx}$ satisfera à l'équation

$$y'' - \mathrm{P}y' + ny = 0.$$

La substitution donne, en effet,

$$y'' - \mathrm{P}y' + ny = e^{\int \mathrm{P} dx} (v'' + \mathrm{P}v' + nv)' = 0.$$

Par ce théorème, l'intégration de l'équation (2) est ramenée à celle de l'équation (1), où m est supposé positif.

2. Si $y = v$ satisfait à l'équation (1), $y = \frac{1}{x} v'$ satisfera à l'équation

$$(3) \qquad y'' + \frac{m+2}{x} y' + ny = 0.$$

On trouve, en effet,

$$y'' + \frac{m+2}{x} y' + ny = \frac{1}{x} \left(v'' + \frac{m}{x} v' + nv \right)' = 0.$$

Ce théorème ramène le cas général de m positif à celui de $m < 2$.

3. Si dans l'équation (1), on pose $y = x^{1-m}.u$, on aura

$$u'' - \frac{2-m}{x} u' - nu = 0. \tag{4}$$

On ramène ainsi le cas de m compris entre 1 et 2 à celui de m compris entre 0 et 1.

Le cas de m entier pair est ramené à celui $m = 0$, et celui de m entier impair à celui de $m = 1$.

4. Si v satisfait à l'équation (1), on satisfera aux équations

$$v'' - \left(\frac{2i+m}{x}\right) v' + nv = 0, \tag{5}$$

$$y'' - \left(\frac{2i+m}{x}\right) y' + ny = 0, \tag{6}$$

où l'on suppose i entier positif, par les formules

$$y = \frac{1}{x}\left\{\left\{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\cdots\left(\frac{1}{x}v'\right)'\right]'\cdots\right\}'\right\}, \tag{7}$$

$$y = x^{2i-m}\left\{\left\{\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\cdots\left(\frac{1}{x}v'\right)'\right]'\cdots\right\}'\right\}. \tag{8}$$

la première renfermant i dérivations, et la seconde $i+1$.

C'est la conséquence immédiate des n^{os} **1** et **2**.

5. Si dans les formules (7) et (8) on fait

$$v = c \sin x\sqrt{n} + c_1 \cos x\sqrt{n} \quad \text{pour } n \text{ positif},$$

$$v = c e^{x\sqrt{-n}} + c_1 e^{-x\sqrt{-n}} \quad \text{pour } n \text{ négatif},$$

on aura, sous forme finie, les intégrales complètes des équations (1) et (2) pour le cas de $m = 2i$ entier positif pair.

C'est le cas de $m = 0$ dans les équations (5) et (6). Alors l'équation $v'' + nv = 0$ est satisfaite par les valeurs de v données plus haut.

Les formules (7) et (8) pourront, quand m n'est pas un entier pair, servir à faciliter l'emploi de la formule qui donne y au moyen d'intégrales définies, cette formule étant en défaut quand m n'est pas compris entre 0 et 2.

Dans un Mémoire intitulé : *Nouvelles remarques sur l'équation de Riccati* (tome VI de ce Journal, page 13), M. Liouville s'exprime

ainsi : « Pour que l'équation

$$y'' = y\left(A + \frac{B}{x^2}\right),$$

» où la constante A est supposée essentiellement différente de zéro,
» puisse être satisfaite en prenant pour y une fonction de x expri-
» mable par un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et
» logarithmiques, et de signes $\int$ indiquant des intégrales indéfinies re-
» latives à la variable x, il est nécessaire et suffisant que B soit de
» forme $\beta(\beta+1)$, β étant un entier nul ou positif. Cette condition
» étant remplie, on pourra exprimer, à l'aide des signes indiqués et
» même à l'aide des seuls signes algébriques et exponentiels, l'inté-
» grale complète de l'équation

$$y'' = y\left(A + \frac{B}{x^2}\right). \text{ »}$$

Or, si l'on fait $y = x^{-\frac{m}{2}} z$, l'équation

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0$$

se réduit à

$$z'' = z\left(-n + \frac{\frac{m^2 - 2m}{4}}{x^2}\right),$$

et si l'on pose $\frac{m^2 - 2m}{4} = \beta(\beta + 1)$, il en résulte

$$(m - 1)^2 = (2\beta + 1)^2;$$

d'où, pour m positif,

$$m = 2(\beta + 1),$$

et, pour m négatif,

$$m = 2\beta.$$

On ne peut donc intégrer l'équation

$$y'' + \frac{m}{x} y' + ny = 0,$$

sous forme finie, que pour m pair positif ou négatif.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE.

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

« Berlin, 1er août 1846.

» ..... Dans la traduction de mon ancienne Lettre à M. Steiner, que vous venez de publier (*voir* le cahier de juin), il s'est glissé une erreur de conséquence. Au lieu de *chaque courbe à double courbure de l'ellipsoïde,* il est dit dans l'original *chaque ligne de courbure de l'ellipsoïde.* Assurément il y a une infinité d'autres courbes à double courbure de l'ellipsoïde qui jouissent de la même propriété d'avoir cette sorte de foyers, mais on ne peut pas étendre cela à toutes les courbes de l'ellipsoïde.

» La phrase : Cette proposition *est loin de me paraître sans importance,* est remplacée dans l'original par : *ne me paraît pas,* etc. Mais c'est égal.

» Il y a quatorze ans, je me suis posé le problème de chercher l'attraction d'un ellipsoïde homogène, exercée sur un point extérieur quelconque, par une méthode analogue à celle employée par Maclaurin par rapport aux points situés dans les axes principaux. J'y suis parvenu par trois substitutions consécutives. La première est une transformation de coordonnées; par la seconde, le radical

$$\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \beta \cos^2 \psi - n^2 \sin^2 \beta \sin^2 \psi},$$

qui entre dans la double intégrale transformée, est rendu rationnel au moyen de la double substitution

$$m \sin \beta \cos \psi = \sin \gamma \cos \delta, \quad n \sin \beta \sin \psi = \sin \gamma \sin \delta;$$

la troisième est encore une transformation de coordonnées. La recherche du sens géométrique de ces trois substitutions m'a conduit à approfondir la théorie des surfaces confocales, par rapport auxquelles je découvris quantité de beaux théorèmes dont je communiquai quelques-uns des principaux à M. Steiner.

» Considérons l'ellipsoïde confocal mené par le point attiré P, et le

point p, de l'ellipsoïde proposé, conjugué à P. Soient Q et q deux autres points conjugués quelconques situés respectivement sur l'ellipsoïde extérieur et intérieur. Menons de P un premier cône tangent à l'ellipsoïde intérieur, de p un second cône tangent à l'ellipsoïde extérieur. Ce dernier, tout imaginaire qu'il est, a ses trois axes réels (ainsi que ses deux droites focales). La première substitution ramène les axes de l'ellipsoïde à ceux du premier cône (c'est la substitution employée par Poisson, mais que j'avais antérieurement traitée et même étendue à un nombre quelconque de variables dans le Mémoire *De binis Functionibus homogeneis*, etc.). Par la seconde substitution, les angles que la droite Pq forme avec les axes du premier cône sont ramenés aux angles que la droite pQ forme avec les axes du second. Par la dernière substitution, on retourne de ces axes aux axes de l'ellipsoïde. La seconde substitution répond à un théorème de géométrie remarquable, savoir que :

« Les cosinus des angles que la droite Pq forme avec deux des axes » du premier cône sont en raison constante avec les cosinus des angles » que la droite pQ forme avec deux des axes du second cône; ces deux » axes sont les tangents situés respectivement dans les sections de plus » grande et de moindre courbure de chaque ellipsoïde, le troisième » axe étant la normale à l'ellipsoïde. »

» Tout cela semble difficile à établir par la synthèse.

» Je viens de publier un petit Mémoire où je prouve que mon système d'équations différentielles, que je nomme *abéliennes*, est intégré complètement par des équations algébriques entre les combinaisons des variables (leur somme, la somme des produits des variables prises deux à deux, trois à trois, etc.) dont une seulement est du second, toutes les autres du premier ordre. Par exemple, les équations

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} - \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \quad \frac{xdx}{\sqrt{X}} + \frac{ydy}{\sqrt{Y}} + \frac{zdz}{\sqrt{Z}} = 0,$$

où X, Y, Z sont respectivement les mêmes fonctions du sixième ordre de x, y, z, sont intégrées par une équation du second ordre entre les deux quantités $x + y + z$ et $yz + zx + xy$, et une autre équation de la forme

$$xyz = \alpha(yz + zx + xy) + \beta(x + y + z) + \gamma,$$

où α, β, γ sont des constantes.... »

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE.

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

« 6 juillet 1846.

» ..... Aux intégrales contenues dans l'article que vous avez bien voulu insérer dans votre Journal (cahier de mai, page 157), on peut ajouter les suivantes, qui valent la peine d'être mentionnées.

» En conservant les notations qui se trouvent dans ce Mémoire, on a l'équation (22)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}$$

$$= \frac{1}{2k^2k'^2}\left\{\left[1 + k'^2 - k'^2 \log\left(\frac{1}{k'}\right)\right] F(k) - \left[2 - \log\left(\frac{1}{k'}\right)\right] E(k)\right\}.$$

D'ailleurs, il est évident que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{d\varphi}{\Delta} - \frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{d\varphi}{\Delta},$$

ce qui donne, en substituant pour $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{d\varphi}{\Delta}$ sa propre valeur, tirée de l'équation (18),

$$(a) \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \frac{d\varphi}{\Delta^2} = \frac{1}{2k'^2}\left\{1 + k'^2 F(k) - \left[\log\left(\frac{1}{k'}\right) - 2\right] E(k)\right\}.$$

» Maintenant faisons, dans l'équation (17),

$$f(\Delta) = \frac{1}{\Delta^2} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

et nous en conclurons, à l'aide de l'équation (a),

$$(b)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1}{\Delta}\right) \Delta\, d\varphi = \frac{1}{2}\left\{\left[2 + \log\left(\frac{1}{k'}\right)\right] E(k) - (1 + k'^2) F(k)\right\}.$$

» On peut encore déduire de l'équation (b), par l'intégration par parties, l'intégrale suivante

$$(c)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{E(k, \varphi) \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \frac{1}{2k}\left\{(1 - k'^2) F(k) + \left[\log\left(\frac{1}{k'}\right) - 2\right] E(k)\right\}.$$

» Il serait assez facile de trouver beaucoup d'autres intégrales qui appartiennent à cette classe. J'ai mentionné les formules (a), (b), (c), parce qu'elles paraissent être, en quelque sorte, fondamentales. »

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer;

PAR J. LIOUVILLE.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 1er juin 1846.)

§ I.

1. Soit M un point matériel assujetti à demeurer constamment dans un plan ou sur une surface donnée, et dans le mouvement duquel le principe des forces vives ait lieu, en sorte que

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2U + C, \tag{1}$$

C étant une constante, ds l'élément parcouru pendant le temps dt, et U la fonction des forces accélératrices. Les coordonnées du point M et la fonction U pourront s'exprimer au moyen de deux variables seulement. Désignons ces variables par α, β, et admettons qu'elles soient telles que l'expression de ds^2 prenne la forme

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2), \tag{2}$$

où λ représente une fonction de α, β. On aura ainsi

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}(2U + C); \tag{3}$$

et les équations du mouvement seront, comme on sait,

$$\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\alpha},$$

$$\frac{d.\lambda\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\beta}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\beta}.$$

ou, plus simplement, à cause de l'équation (3),

$$(4)\qquad \frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{2\lambda}\frac{d\lambda}{d\alpha}(2U + C) + \frac{dU}{d\alpha}.$$

$$(5)\qquad \frac{d.\lambda\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{2\lambda}\frac{d\lambda}{d\beta}(2U + C) + \frac{dU}{d\beta}.$$

Voyons dans quels cas nous parviendrons à les intégrer.

2. Après avoir multiplié les deux membres de l'équation (4) par $2\lambda d\alpha$, on peut l'écrire

$$d.\lambda^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{d.(2U+C)\lambda}{d\alpha}d\alpha.$$

Si donc l'expression de $(2U + C)\lambda$ se trouve être de la forme

$$(6)\qquad (2U + C)\lambda = f(\alpha) - F(\beta),$$

l'intégration s'effectuera d'elle-même, et l'on aura

$$(7)\qquad \lambda^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = f(\alpha) - A,$$

A étant une constante arbitraire. Dans ce même cas, on tire des équations (3) et (6)

$$\lambda^2\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] = f(\alpha) - F(\beta).$$

Donc, en retranchant l'équation (7),

$$(8)\qquad \lambda^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = A - F(\beta).$$

Des équations (7) et (8) on conclut immédiatement, pour la trajectoire décrite par le mobile, l'équation suivante,

$$(9)\qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - A}} = \frac{d\beta}{\sqrt{A - F(\beta)}},$$

où les variables sont séparées. On aura ensuite aisément l'expression

du temps par une quadrature, et le problème que nous nous proposions sera résolu.

3. Il n'est pas plus général, mais il pourra être plus commode, d'employer, au lieu de α, β, deux autres variables μ, ν telles que l'on ait

$$ds^2 = \lambda(m d\mu^2 + n d\nu^2), \tag{10}$$

m étant une fonction quelconque de μ seulement, et n une fonction de ν, tandis que λ peut contenir à la fois μ et ν. Pour rentrer dans l'hypothèse précédente, il suffirait de poser

$$\alpha = \int \sqrt{m}.d\mu, \quad \beta = \int \sqrt{n}.d\nu,$$

ce qui fournit μ en fonction de α, et ν en fonction de β. La condition d'intégrabilité (6) peut alors s'écrire

$$(2U + C)\lambda = f(\mu) - F(\nu), \tag{11}$$

où, bien entendu, f et F ne désignent plus les mêmes fonctions que tout à l'heure; et l'équation différentielle de la trajectoire devient

$$\frac{\sqrt{m}.d\mu}{\sqrt{f(\mu) - A}} = \frac{\sqrt{n}.d\nu}{\sqrt{A - F(\nu)}}. \tag{12}$$

4. La suite des points pour lesquels une des variables coordonnées α, β ou μ, ν conserve même valeur sur la surface à laquelle le mobile M est attaché, forme une courbe. Par chaque point de la surface on peut ainsi faire passer deux courbes appartenant aux deux systèmes respectifs

$$\alpha \text{ ou } \mu = \textit{constante}, \quad \beta \text{ ou } \nu = \textit{constante},$$

et regarder ce point comme déterminé par l'intersection des deux courbes. Je dis que cette intersection s'effectue à angle droit.

En effet, la formule (10), qui fournit généralement la distance ds des deux points (α, β), $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$, donne, lorsqu'on y fait $d\beta = 0$ ou $d\alpha = 0$, les distances ds' et ds'' du point (α, β) aux points $(\alpha + d\alpha, \beta)$ et $(\alpha, \beta + d\beta)$; on en déduit

$$ds'^2 = \lambda d\alpha^2, \quad ds''^2 = \lambda d\beta^2:$$

donc

$$ds^2 = ds'^2 + ds''^2.$$

Mais on voit immédiatement, par la géométrie, que

$$ds^2 = ds'^2 + ds''^2 - 2ds'ds'' \cos v,$$

v étant l'angle de ds' avec ds''; donc

$$\cos v = 0,$$

et les éléments ds', ds'' sont à angle droit l'un sur l'autre, ce qu'il fallait démontrer [*].

Soit i l'angle que ds fait avec ds''; on aura

$$(13) \qquad \cos i = \frac{ds'}{ds}, \quad \sin i = \frac{ds''}{ds}, \quad \operatorname{tang} i = \frac{d\alpha}{d\beta};$$

et, en remplaçant $d\alpha$ par $\operatorname{tang} i\, d\beta$, on pourra donner à l'équation (9) de la trajectoire cette forme remarquable

$$(14) \qquad f(\alpha) \cos^2 i + F(\beta) \sin^2 i = A.$$

En employant μ et ν, on aurait semblablement

$$(15) \qquad ds'^2 = \lambda m d\mu^2, \quad ds''^2 = \lambda n d\nu^2, \quad \operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{m}\, d\mu}{\sqrt{n}\, d\nu},$$

et pour l'équation de la trajectoire déduite de la formule (12),

$$(16) \qquad f(\mu) \cos^2 i + F(\nu) \sin^2 i = A.$$

5. Mais notre méthode ne fournit l'équation de la trajectoire que quand on suppose satisfaite la condition d'intégrabilité exprimée par l'équation (6), ou, si l'on veut, par l'équation (11). Or l'équation (6) ou (11) peut avoir lieu de deux manières distinctes :

---

[*] Si l'on conçoit une série de lignes (α) répondant à des valeurs successives du paramètre séparées par l'intervalle constant $d\alpha$, puis une série orthogonale (β) dans laquelle on suppose aussi la différentielle $d\beta$ constante, la surface se trouvera partagée en rectangles $ds'ds''$, et le rapport des côtés ds', ds'' sera celui de $d\alpha$ à $d\beta$; ce rapport aura donc partout même valeur, et les rectangles seront semblables entre eux; on pourra même les réduire à des carrés, en prenant $d\alpha = d\beta$.

1°. Quelle que soit la valeur de la constante C; et cela suppose les quantités λ, λU, toutes deux de la forme du second membre, c'est-à-dire toutes deux exprimables par la somme algébrique de deux fonctions, l'une de α ou μ, l'autre de β ou ν;

2°. Pour une valeur particulière de C; ce qui suppose une valeur aussi particulière de la force vive, en sorte que, dans ce cas, la solution du problème exige qu'une certaine condition relative à l'origine du mouvement soit satisfaite.

Dans le second cas, la valeur de λ peut être quelconque, pourvu que celle de $2U + C$ satisfasse à la condition (6) ou (11). Le premier cas sous ce rapport est bien moins étendu; mais, par un autre côté, il est de beaucoup le plus important. S'il faut, en effet, se borner à une valeur de λ de la forme $f(\alpha) - F(\beta)$ ou $f(\mu) - F(\nu)$, du moins il n'y a alors aucune restriction relative aux conditions initiales du mouvement.

C'est à ce premier cas seul que nous allons désormais nous attacher.

L'expression du temps à laquelle on arrive quand il a lieu mérite d'être rapportée. Servons-nous des variables α, β, et soient, conformément à l'hypothèse,

$$(17)\qquad \lambda = \varphi(\alpha) - \varpi(\beta), \quad \lambda U = f(\alpha) - F(\beta),$$

ce qui revient à faire, dans la formule (6),

$$(18)\qquad f(\alpha) = 2f(\alpha) + C\varphi(\alpha), \quad F(\beta) = 2F(\beta) + C\varpi(\beta).$$

On aura, en vertu des équations (7) et (8),

$$(19)\qquad dt = \frac{[\varphi(\alpha) - \varpi(\beta)]\,d\alpha}{\sqrt{2f(\alpha) + C\varphi(\alpha) - A}} = \frac{[\varphi(\alpha) - \varpi(\beta)]\,d\beta}{\sqrt{A - 2F(\beta) - C\varpi(\beta)}}.$$

d'où l'on conclut, d'une part, l'équation

$$(20)\qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{2f(\alpha) + C\varphi(\alpha) - A}} = \frac{d\beta}{\sqrt{A - 2F(\beta) - C\varpi(\beta)}},$$

qui, intégrée, détermine la trajectoire du mobile, et, d'autre part, la formule

$$(21)\qquad dt = \frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{2f(\alpha) + C\varphi(\alpha) - A}} - \frac{\varpi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{A - 2F(\beta) - C\varpi(\beta)}}.$$

où les variables sont aussi séparées, de sorte qu'on pourra avoir l'expression de t sans supposer d'abord qu'une des variables α, β est exprimée au moyen de l'autre.

J'ajouterai qu'en désignant par B et ε deux constantes arbitraires, et par Θ l'intégrale

$$(22)\qquad \int \left[d\alpha \sqrt{2f(\alpha) + C\varphi(\alpha) - A} + d\beta \sqrt{A - 2F(\beta) - C\varpi(\beta)}\right],$$

on peut donner à l'équation de la trajectoire et à l'expression du temps la forme suivante :

$$(23)\qquad \frac{d\Theta}{dA} = B, \quad t = 2\frac{d\Theta}{dC} + \varepsilon;$$

c'est ce qu'il est aisé de vérifier. Cette forme, au reste, était indiquée à priori par les beaux théorèmes de M. Jacobi.

Dans le cas d'un mobile qui n'est sollicité par aucune force accélératrice (la trajectoire est alors une ligne géodésique), on a $U = 0$; on peut donc prendre $f(\alpha) = 0$, $F(\beta) = 0$. Ainsi, en représentant par a le rapport des deux constantes A, C, on a alors

$$(24)\qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{\varphi(\alpha) - a}} = \frac{d\beta}{\sqrt{a - \varpi(\beta)}}.$$

Dans ce même cas, l'expression de ds se déduit immédiatement de celle de dt, car

$$(25)\qquad ds = \sqrt{C}.dt = \frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{\varphi(\alpha) - a}} - \frac{\varpi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{a - \varpi(\beta)}}.$$

En ayant égard à l'équation entre α et β, on peut encore écrire

$$(26)\qquad ds = d\alpha \sqrt{\varphi(\alpha) - a} + d\beta \sqrt{a - \varpi(\beta)},$$

en sorte que l'équation de la trajectoire revient alors à celle-ci :

$$(27)\qquad \delta ds = 0,$$

la variation ou différentielle δ étant relative à la constante arbitraire a.

6. Tout ce qu'on vient de dire reste vrai en employant les variables μ, ν au lieu de α, β, et remplaçant en conséquence $d\alpha$ par $\sqrt{m}.d\mu$, $d\beta$

par $\sqrt{n}.d\nu$. En posant donc

$$(28)\qquad \lambda = \varphi(\mu) - \varpi(\mu), \quad \lambda U = f(\mu) - F(\nu),$$

ce qui revient à prendre, dans la formule (11),

$$(29)\qquad f(\mu) = 2f(\mu) + C\varphi(\mu), \quad F(\nu) = 2F(\nu) + C\varpi(\nu),$$

on a cette équation de la trajectoire,

$$(30)\qquad \frac{\sqrt{m}.d\mu}{\sqrt{2f(\mu) + C\varphi(\mu) - A}} = \frac{\sqrt{n}.d\nu}{\sqrt{A - 2F(\nu) - C\varpi(\nu)}},$$

à laquelle, du reste, on peut, d'après l'équation (16), donner aussi la forme

$$(31)\qquad [2f(\mu) + C\varphi(\mu)]\cos^2 i + [2F(\nu) + C\varpi(\nu)]\sin^2 i = A.$$

Et, dans le cas particulier de $f(\mu) = 0$, $F(\nu) = 0$, c'est-à-dire des lignes géodésiques, il vient plus simplement

$$(32)\qquad \frac{\sqrt{m}.d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu) - a}} = \frac{\sqrt{n}.d\nu}{\sqrt{a - \varpi(\nu)}},$$

ou, si l'on veut,

$$(33)\qquad \varphi(\mu)\cos^2 i + \varpi(\nu)\sin^2 i = a,$$

a désignant toujours le rapport des deux constantes arbitraires A, C; l'arc ds de ces lignes géodésiques est, en outre, donné par la formule

$$(34)\qquad ds = d\mu\sqrt{m}\sqrt{\varphi(\mu) - a} + d\nu\sqrt{n}\sqrt{a - \varpi(\nu)}.$$

Passons aux applications.

§ II.

7. Supposons d'abord le point M dans un plan. En rapportant ce point à deux axes rectangulaires, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

formule qui comporte l'application de notre méthode, mais qui ne conduirait qu'à une conclusion évidente à priori, savoir, que les équations

du mouvement s'intègrent quand la fonction des forces est de la forme

$$U = \text{Fonct. } (x) - \text{fonct. } (y).$$

Mais on obtiendra des résultats intéressants en substituant aux coordonnées rectangulaires x, y les coordonnées *elliptiques* μ, ν, demi-axes d'ellipses et d'hyperboles homofocales représentées par les équations

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1.$$

Cela donne

$$b^2 x^2 = \mu^2 \nu^2, \quad b^2 y^2 = (\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2),$$

et

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right).$$

En comparant à la formule (10), on a donc ici

$$m = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad n = \frac{1}{b^2 - \nu^2}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2.$$

La valeur de λ étant composée, comme nous le demandons, d'une fonction de μ jointe à une fonction de ν, nous pouvons prendre pour λU une autre expression quelconque de la même espèce. Ainsi, toutes les fois que l'on aura

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2},$$

les équations du mouvement seront ramenées aux quadratures par nos formules.

D'après la valeur de λ, comparée à la première des formules (28) du n° **6**, on peut prendre

$$\varphi(\mu) = \mu^2, \quad \varpi(\nu) = \nu^2,$$

et appliquer la formule (30). Ainsi l'équation de la trajectoire sera

$$\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{2f(\mu) + C\mu^2 - A}} = \frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{A - 2F(\nu) - C\nu^2}},$$

ou bien, en introduisant l'angle i et se servant de la formule (31),

$$[2f(\mu) - C\mu^2]\cos^2 i + [2F(\nu) - C\nu^2]\sin^2 i = A.$$

Ici i désigne l'angle que la trajectoire fait en chaque point avec l'ellipse correspondante (μ). L'élément ds'' de cette ellipse a pour valeur

$$ds'' = \sqrt{\lambda m}.d\nu = \frac{\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}}\,d\nu,$$

et l'élément ds' de l'hyperbole orthogonale s'exprime par

$$ds' = \sqrt{\lambda m}.d\mu = \frac{\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\,d\mu;$$

enfin on a

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{b^2-\nu^2}.d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}.d\nu}.$$

Il faut aussi observer qu'on doit donner à ν et $\sqrt{b^2-\nu^2}$ des valeurs tantôt positives, tantôt négatives, et que, cela étant, on pourra prendre

$$bx = \mu\nu, \quad by = \sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2}.$$

Au reste, comme on a essentiellement $\nu^2 > b^2$, rien n'empêche de faire

$$\nu = b\cos\theta;$$

de là résultera

$$x = \mu\cos\theta, \quad y = \sqrt{\mu^2-b^2}.\sin\theta,$$

et dans ces formules les quantités μ et $\sqrt{\mu^2-b^2}$ resteront toujours positives, tandis que $\sin\theta$ et $\cos\theta$ prendront naturellement leurs signes ordinaires d'après les valeurs de l'angle θ.

8. Soit, comme exemple des formules précédentes,

$$f(\mu) = g\mu + g'\mu + k(\mu^4 - b^2\mu^2),$$
$$F(\nu) = g\nu - g'\nu - k(\nu^4 - b^2\nu^2),$$

g, g', k étant des constantes. Cela nous donnera

$$U = \frac{g}{\mu+\nu} + \frac{g'}{\mu-\nu} + k(\mu^2+\nu^2-b^2).$$

Mais $\mu+\nu$ et $\mu-\nu$ expriment les distances r, r' du point M aux deux

foyers communs F, F′ des ellipses et des hyperboles qui forment notre système actuel de coordonnées; de plus, on a

$$\mu^2 + \nu^2 - b^2 = x^2 + y^2 + R^2.$$

R étant la distance du point M au centre O, milieu de FF′. De là cette expression nouvelle de U,

$$U = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2.$$

C'est précisément celle qui convient au cas d'un mobile attiré ou repoussé, suivant la loi ordinaire de l'inverse du carré des distances, par deux points fixes F, F′ dont les actions à l'unité de distance peuvent être inégales, et proportionnellement à la distance par un troisième point O placé au milieu de FF′.

On sait qu'Euler a donné le premier la solution de ce problème dans le cas où les deux points fixes F, F′ agissent seuls, et que Lagrange a ensuite montré comment on peut aussi tenir compte de l'action du point O, même en supposant que le mobile peut décrire librement dans l'espace une courbe quelconque. Nous opérerons ailleurs de cette dernière extension; mais, en continuant à nous réduire à une trajectoire plane, nous pouvons déjà donner aux solutions d'Euler et de Lagrange une plus grande généralité. Ainsi rien ne nous empêche d'ajouter deux actions en raison inverse du cube de la distance, émanant, avec une énergie inégale si l'on veut, des deux axes rectangulaires Ox, Oy dont le premier coïncide avec FF′, et s'exerçant chacune suivant la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe correspondant, genre de forces dont Newton n'a pas dédaigné de s'occuper dans le livre des *Principes*. Il suffira de prendre dans $f(\mu)$ ces deux termes de plus,

$$\frac{h}{\mu^2} + \frac{h'}{\mu^2 - b^2},$$

et dans $F(\nu)$ ces deux-ci,

$$\frac{h}{\nu^2} - \frac{h'}{b^2 - \nu^2}.$$

Mais il est inutile de s'arrêter à tous ces détails. La formule

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}$$

en dit assez par elle-même. Il y aura même plus d'intérêt, sous un certain point de vue, à particulariser de plus en plus la formule

$$U = \frac{g}{\mu+\nu} + \frac{g'}{\mu-\nu} + k(\mu^2 + \nu^2 - b^2) = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2$$

Soient $g = 0$, $g' = 0$, $k = 0$, d'où $U = 0$; la trajectoire du mobile doit évidemment se réduire alors à une ligne droite, puisque le point M n'est sollicité par aucune force. Mais nos formules donnent alors (en représentant par a le rapport des deux constantes arbitraires A et C),

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - a)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(a - \nu^2)}},$$

ou encore

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = a.$$

Il faut en conclure une proposition, bien connue du reste, savoir, que l'une ou l'autre équation est propre à représenter une ligne droite en coordonnées elliptiques, et cela quelle que soit la position des axes principaux communs aux coniques qui le composent et l'excentricité $2b$. Ces équations ne sont, au surplus, qu'un cas particulier des formules (32), (33); et la formule (34) donne, en outre, pour l'élément ds de la droite, l'expression suivante :

$$ds = \frac{d\mu\sqrt{\mu^2 - a}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} = \frac{d\nu\sqrt{a - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}.$$

Remarquons aussi que les droites en nombre infini qui répondent à une même valeur de a sont toutes tangentes à une même conique déterminée par l'équation $\mu^2 = a$ ou $\nu^2 = a$, suivant que l'on a $a > b^2$ ou $a < b^2$.

En faisant seulement $g = 0$, $g' = 0$, et laissant k quelconque, le mobile M serait soumis à l'action d'une seule force proportionnelle à la distance OM. La trajectoire pourrait donc être une conique quelconque ayant son centre au point O. Nos formules nous donneraient dès lors l'équation d'une telle conique exprimée en coordonnées μ, ν.

Enfin elles donnent l'équation générale des coniques qui ont un foyer commun F, en prenant $g' = 0$, $k = 0$, et laissant g quelconque.

Cette équation est

$$\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{2g\mu + C\mu^2 - A}} = \frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{A - 2g\nu - C\nu^2}}$$

ou bien

$$2g\mu - C\mu^2 \cos^2 i - 2g\nu + C\nu^2 \sin^2 i = A;$$

en posant

$$g = lC, \quad A = a - l^2 C,$$

elle prend la forme suivante

$$(\mu - l)^2 \cos^2 i - (\nu - l)^2 \sin^2 i = a,$$

et devient tout à fait analogue à celle de la ligne droite qu'on retrouve lorsque $l = 0$.

M. Jacobi a signalé, au point de vue analytique, l'importance des cas particuliers dont nous venons de dire un mot, et qui conduisent, par exemple, au théorème fondamental d'Euler pour les fonctions elliptiques. Nous croyons pouvoir affirmer que leur importance n'est pas moindre au point de vue de la Géométrie.

9. Nous pouvons introduire les rayons vecteurs r et r' au lieu de μ et ν dans la formule

$$U = \frac{F(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2};$$

ayant, en effet,

$$\mu = \tfrac{1}{2}(r + r'), \quad \nu = \tfrac{1}{2}(r - r'), \quad \mu^2 - \nu^2 = rr',$$

nous trouverons

$$U = \frac{\text{Fonct.}(r + r') - \text{fonct.}(r - r')}{rr'}.$$

d'où l'on conclura, si l'on veut, l'expression générale de U, pour laquelle notre méthode réussit, en fonction de coordonnées rectangulaires x, y relatives à deux axes situés dans le plan où le point M se meut, mais d'ailleurs quelconques; il n'y a qu'à remplacer r et r' par

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{(x - p')^2 + (y - q')^2}.$$

p, q, p', q' étant des constantes.

En supposant que la fonction des forces soit donnée pour un problème particulier et qu'on veuille savoir si elle rentre dans notre formule, on ne sera pas absolument obligé, comme on voit, d'introduire μ et ν; il suffira de chercher si, en la désignant par U, on a

$$\frac{d^2.rr'\mathrm{U}}{dr^2} = \frac{d^2.rr'\mathrm{U}}{dr'^2},$$

ou, mieux encore, si l'équation aux différences partielles en x, y, dans laquelle celle que nous venons d'écrire se transforme, est vérifiée à l'aide de valeurs convenables de p, q, p', q'.

10. Supposons que les deux foyers F, F′ se rapprochent indéfiniment de manière à coïncider enfin avec le point O, et voyons ce que devient, dans ce cas, la formule

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{f}(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Pour cela observons que, quand les foyers F, F′ sont très-près l'un de l'autre, la valeur de b est très-petite; c'est en posant $b = 0$ que nous exprimerons qu'ils viennent se confondre avec le point O. Alors nos ellipses deviendront des cercles de rayon μ, ayant un centre commun O, et nos hyperboles se transformeront en lignes droites passant par le point O. Supposons donc d'abord la valeur de b très-petite, et soit (à cause de $\nu^2 < b^2$, comme on l'a déjà expliqué),

$$\nu = b\cos\theta, \quad \text{d'où} \quad x = \mu\cos\theta, \quad y = \sqrt{\mu^2 - b^2}.\sin\theta,$$

formules qui à la limite $b = 0$ deviendront celles des coordonnées polaires ordinaires. A cette même limite, $\mu^2 - \nu^2$ ou $\mu^2 - b^2\cos^2\theta$ se réduira à μ^2 dans l'expression de U; quant à la fonction $\mathrm{F}(\nu)$, on peut la remplacer par $\Psi\left(\frac{\nu}{b}\right) = \Psi(\cos\theta)$. La valeur de U se composera donc de deux termes: l'un fonction de μ, qui répond à une force dirigée vers le point O et agissant d'après une fonction quelconque de la distance; l'autre qu'on peut exprimer en x, y, et qui devient alors une fonction homogène quelconque du degré -2 par rapport à ces coordonnées.

On discuterait d'une manière semblable le cas où un des deux foyers s'éloigne de l'autre à l'infini.

Et d'abord si, laissant le centre O fixe, on agrandit indéfiniment la distance FF′, chacune de nos ellipses se réduira à deux droites parallèles entre elles, et chacune de nos hyperboles aussi à deux droites perpendiculaires sur les précédentes, de sorte que l'on retombera sur les coordonnées rectangles ordinaires. On pourrait même n'avoir qu'une seule droite pour chaque conique en éloignant la seconde droite, et, par conséquent, le centre O lui-même à l'infini.

En laissant un foyer fixe et transportant l'autre à l'infini dans une direction déterminée, on obtiendra un système particulier assez remarquable où les points du plan résulteront de l'intersection de deux séries de paraboles ayant toutes même axe et même foyer, mais tournées diversement de manière à former deux groupes rectangulaires entre eux. Mais il est plus simple de traiter directement ce cas particulier que de le déduire des formules générales. Il répond à la transformation analytique suivante

$$x + y\sqrt{-1} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^2, \quad x = \alpha^2 - \beta^2, \quad y = 2\alpha\beta,$$

qui donne

$$dx^2 + dy^2 \quad \text{ou} \quad ds^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

La fonction des forces pour laquelle notre méthode d'intégration réussit est, par conséquent,

$$U = \frac{\text{Fonct.}(\alpha) - \text{fonct.}(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

11. Il est bon d'observer que nos formules analytiques pour le mouvement d'un point dans un plan s'étendent au cas du mouvement sur une surface développable. En effet, si l'on applique le plan sur une telle surface, les coordonnées μ, ν ou α, β, dont nous venons de faire usage, pourront encore servir à déterminer les points M dans leurs nouvelles positions; les éléments ds ne changeront pas de longueur; on aura encore

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

et les équations du mouvement données par les formules (3) et (4) resteront les mêmes. La possibilité d'intégrer répondra donc toujours à la

même formule

$$U = \frac{f(u - F(v))}{u^2 - v^2}.$$

Mais, bien qu'analytiquement identique pour un plan et pour une surface développable, cette formule devra, on le conçoit, se présenter avec une signification géométrique et mécanique complétement différente. En général, et avec la même différence quant au fond des choses, des formules d'analyse identiques entre elles serviront pour le mouvement d'un point sur deux surfaces susceptibles d'être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

On peut encore généraliser sous un autre point de vue les résultats contenus dans ce paragraphe. Observons, en effet, que quand on est parvenu à déterminer le mouvement d'un point libre dans un plan ou dans l'espace sous l'action de forces données X, Y, ou X, Y, Z, parallèles à des axes rectangulaires, on a par cela même déterminé aussi implicitement le mouvement d'un point sollicité par les mêmes forces suivant des axes obliques. Les équations du mouvement étant les mêmes dans les deux cas, toute méthode d'intégration qui a réussi pour l'un réussira pour l'autre, en donnant lieu à des calculs semblables, mais avec une signification géométrique et mécanique différente. Reportons-nous, par exemple, aux formules du n° 9, et nous en conclurons que les équations du mouvement d'un mobile dans le plan yOx de deux axes *obliques* Ox, Oy parallèlement auxquels agissent deux forces $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, s'intègrent toutes les fois qu'on a

$$U = \frac{\text{Fonct.}(r + r') - \text{fonct.}(r - r')}{rr'},$$

où r et r' désignent les deux quantités

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2}, \quad \sqrt{(x - p')^2 + (y - q')^2},$$

p, q, p', q' étant des constantes. Mais r et r' n'expriment plus les distances du point (x, y) à deux points fixes.

§ III.

12. Nous avons réussi à appliquer la méthode générale du § I au mouvement d'un point dans un plan, dans un cas très-étendu, en employant des coordonnées elliptiques μ, ν, ou plutôt

$$\alpha = \int \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}}, \quad \beta = \int \frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}.$$

Ce système de coordonnées, d'après lequel les points du plan sont déterminés par la rencontre d'une série d'ellipses et d'hyperboles homofocales, nous a conduit à une valeur de ds^2 de la forme

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

et de plus λ s'est trouvé être la différence de deux fonctions, l'une de α, et l'autre de β. Mais ne pouvait-on pas arriver d'une manière directe, par la force même de l'analyse, au système cité, dont nous n'avons jusqu'ici, pour ainsi dire, fait usage que par hasard; et d'ailleurs est-il le seul pour lequel on obtienne dans un plan, une telle valeur de ds^2? Cette question mérite d'être discutée avec soin, puisque c'est à la forme seule des expressions de ds^2 et de λ que tient le succès de notre méthode d'intégration.

13. Soient donc les coordonnées rectangulaires x et y d'un point quelconque du plan, exprimées par des variables α, β. On demande d'abord que ds^2 ou $dx^2 + dy^2$ soit de la forme

$$dx^2 + dy^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

λ étant une fonction de α, β. Or on a

$$dx = \frac{dx}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dx}{d\beta}\,d\beta,$$

$$dy = \frac{dy}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dy}{d\beta}\,d\beta.$$

La condition énoncée se décompose donc en deux autres; il faut qu'on ait tout à la fois

$$\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta} = 0,$$

et

$$b \qquad \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2.$$

On satisfait à la première quel que soit u, en prenant

$$\frac{dy}{d\alpha} = u\frac{dx}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\beta} = -\frac{1}{u}\frac{dx}{d\beta};$$

et alors la seconde nous donne

$$\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 = u^2\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2.$$

d'où

$$\frac{dx}{d\beta} = \pm u\frac{dx}{d\alpha} = \mp\frac{dy}{d\alpha},$$

ce qui, à cause de l'équation

$$\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta} = 0,$$

donne

$$\frac{dy}{d\beta} = \mp\frac{dx}{d\alpha}.$$

Dans le système

$$\frac{dx}{d\beta} = \mp\frac{dy}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\beta} = \mp\frac{dx}{d\alpha},$$

il est indifférent de prendre à la fois les signes supérieurs, ou à la fois les signes inférieurs, puisque cela revient à changer y de signe. Nous prendrons donc d'une manière déterminée

$$\frac{dx}{d\beta} = -\frac{dy}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\beta} = \frac{dx}{d\alpha};$$

et, en posant

$$x + y\sqrt{-1} = \zeta,$$

nous en conclurons

$$\frac{d\zeta}{d\beta} = \sqrt{-1}\,\frac{d\zeta}{d\alpha}.$$

Donc la valeur de ζ ne peut être que de la forme

$$\zeta = \psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}).$$

Réciproquement, si l'on pose

$$x + y\sqrt{-1} = \psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

en prenant pour x la partie réelle du second membre, et pour y le coefficient de $\sqrt{-1}$, on aura

$$\frac{dx}{d\beta} + \sqrt{-1}\,\frac{dy}{d\alpha} = \sqrt{-1}\left(\frac{dx}{d\beta} + \sqrt{-1}\,\frac{dy}{d\alpha}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{d\beta} = -\frac{dy}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\beta} = \frac{dx}{d\alpha};$$

les conditions (a) et (b) seront donc satisfaites.

14. Le système que nous venons d'obtenir est incomparablement plus étendu que celui des coordonnées elliptiques. Il fournit pour ds^2 une valeur de la forme

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

et peut ainsi, sous un certain point de vue, être de quelque utilité dans des cas particuliers, comme on l'a expliqué au n° 5 du § I. Mais il ne donne pas, en général,

$$\lambda = f(\alpha - F(\beta)),$$

condition que nous désirons aussi remplir. Or le système elliptique est le seul pour lequel on trouve à la fois

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2), \quad \text{et} \quad \lambda = f(\alpha - F(\beta)).$$

C'est ce que nous allons démontrer.

15. La démonstration de la proposition qui nous occupe est assez simple, lorsque la fonction $\psi(\alpha)$ est essentiellement réelle, de telle sorte que l'équation

$$x + y\sqrt{-1} = \psi(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

entraîne cette autre,

$$x - y\sqrt{-1} = \psi(\alpha - \beta\sqrt{-1}),$$

ce qui pourrait ne pas arriver, si la fonction ψ contenait des imaginaires indépendamment de la substitution de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à α. On a alors immédiatement

$$dx^2 + dy^2 = \psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi'(\alpha - \beta\sqrt{-1})\,(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

et la condition que

$$\lambda = f(\alpha) - F(\beta)$$

donne

$$\psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi'(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = f'(\alpha) - F'(\beta).$$

Je différentie cette équation une fois par rapport à α et deux fois par rapport à β; je trouve ainsi

$$\left.\begin{array}{l}\psi^{\text{IV}}(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi'(\alpha - \beta\sqrt{-1}) - \psi''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi''(\alpha - \beta\sqrt{-1}) \\ - \psi''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi''(\alpha - \beta\sqrt{-1}) - \psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi^{\text{IV}}(\alpha - \beta\sqrt{-1})\end{array}\right\} = 0,$$

d'où, en posant $\beta = 0$,

$$\psi^{\text{IV}}(\alpha)\,\psi'(\alpha) = \psi''(\alpha)\,\psi''(\alpha).$$

De là on tire

$$\frac{\psi^{\text{IV}}(\alpha)}{\psi''(\alpha)} = \frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)},$$

et, par suite,

$$\psi''(\alpha) = c\,\psi'(\alpha),$$

c étant une constante essentiellement réelle, puisque la fonction ψ l'est elle-même.

On peut avoir $c = a^2$ ou $c = -a^2$. Dans la première hypothèse, l'intégration donne

$$\psi(\alpha) = Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha} - K,$$

G, H, K étant des constantes réelles. Et de là

$$x + y\sqrt{-1} = Ge^{a(\alpha + \beta\sqrt{-1})} + He^{-a(\alpha + \beta\sqrt{-1})} - K.$$

On peut supprimer sans inconvénient la constante K; cela revient à remplacer x par $x + K$. Cette suppression faite, la comparaison des

parties réelles et imaginaires dans les deux membres donne

$$x = (Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha}) \cos a\beta,$$
$$y = (Ge^{a\alpha} - He^{-a\alpha}) \sin a\beta,$$

d'où, tirant les sinus et cosinus, et égalant à 1 la somme de leurs carrés,

$$\frac{x^2}{(Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha})^2} + \frac{y^2}{(Ge^{a\alpha} - He^{-a\alpha})^2} = 1.$$

En donnant à α successivement différentes valeurs, cette équation représente une série d'ellipses ayant le même centre et dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites; de plus, ces ellipses ont les mêmes foyers, car la différence des carrés de leurs demi-axes est

$$(Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha})^2 - (Ge^{a\alpha} - He^{-a\alpha})^2 = 4GH = \text{constante}.$$

En tirant des mêmes équations

$$x = (Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha}) \cos a\beta,$$
$$y = (Ge^{a\alpha} - He^{-a\alpha}) \sin a\beta,$$

les valeurs de $e^{a\alpha}$, $e^{-a\alpha}$, comme si c'étaient deux inconnues, on trouve

$$e^{a\alpha} = \frac{x \sin a\beta + y \cos a\beta}{2G \sin a\beta \cos a\beta}, \quad e^{-a\alpha} = \frac{x \sin a\beta - y \cos a\beta}{2H \sin a\beta \cos a\beta},$$

d'où, en faisant le produit,

$$\frac{x^2}{4GH \cos^2 a\beta} - \frac{y^2}{4GH \sin^2 a\beta} = 1.$$

Quand on donne à β différentes valeurs, cette équation représente une série d'hyperboles, évidemment homofocales avec les ellipses précédentes.

Au surplus, le premier système de courbes étant connu, le second pouvait être regardé comme connu aussi, puisque ces deux systèmes doivent se couper orthogonalement.

Dans l'hypothèse de $c = -a^2$, une discussion analogue conduit à la même conclusion. En exprimant α et β en x et y, les équations

$$\alpha = \textit{constante}, \quad \beta = \textit{constante}$$

représentent encore deux systèmes de sections coniques homofocales, en sorte que nous retombons de nouveau dans les coordonnées elliptiques du § II.

16. Le calcul devient plus compliqué lorsqu'on suppose que la fonction ψ renferme des imaginaires indépendamment de celle contenue dans la variable. Voici comment on peut procéder alors.

De même qu'en posant

$$\zeta = x + y\sqrt{-1},$$

au n° **13**, on a obtenu

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \sqrt{-1}\frac{d\zeta}{dz},$$

et, par suite,

$$x + y\sqrt{-1} = \psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

de même, en posant

$$\zeta = x - y\sqrt{-1},$$

on aurait trouvé

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = -\sqrt{-1}\frac{d\zeta}{dz},$$

et, par conséquent,

$$x - y\sqrt{-1} = \pi(\alpha - \beta\sqrt{-1}).$$

Cherchons quelle relation existe entre les fonctions π et ψ.

On a ici

$$dx^2 + dy^2 = \psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\pi'(\alpha - \beta\sqrt{-1})(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

La condition

$$\lambda = f(\alpha) + F(\beta)$$

donne donc

$$\psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\pi'(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = f(\alpha) + F(\beta).$$

En différentiant cette équation une fois par rapport à α, puis une seconde fois par rapport à β, il vient

$$\psi''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\pi'(\alpha - \beta\sqrt{-1}) + \psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\pi''(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = 0.$$

Une nouvelle différentiation par rapport à β donne ensuite

$$\left.\begin{array}{l}\psi^{\text{IV}}(\alpha-\beta\sqrt{-1})\pi'(\alpha-\beta\sqrt{-1})-\psi'''(\alpha+\beta\sqrt{-1})\pi''(\alpha-\beta\sqrt{-1})\\ -\psi''(\alpha-\beta\sqrt{-1})\pi'''(\alpha-\beta\sqrt{-1})+\psi'(\alpha+\beta\sqrt{-1})\pi^{\text{IV}}(\alpha-\beta\sqrt{-1})\end{array}\right\}=0.$$

En faisant $\beta=0$, on a donc ces deux équations :

$$\psi'''(\alpha)\pi'(\alpha)-\psi'(\alpha)\pi''(\alpha)=0,$$

et

$$\psi^{\text{IV}}(\alpha)\pi'(\alpha)-\psi'''(\alpha)\pi''(\alpha)-\psi''(\alpha)\pi'''(\alpha)+\psi'(\alpha)\pi^{\text{IV}}(\alpha)=0.$$

De la première on tire

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}=\frac{\pi''(\alpha)}{\pi'(\alpha)};$$

et la seconde, divisée par $\psi'(\alpha)\pi'(\alpha)$, fournit

$$\frac{\psi^{\text{IV}}(\alpha)}{\psi'(\alpha)}-\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}\frac{\pi''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}-\frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}\frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}+\frac{\pi^{\text{IV}}(\alpha)}{\pi'(\alpha)}=0,$$

laquelle, en remplaçant

$$\frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}$$

par son égale

$$\frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}$$

dans le troisième terme, et opérant une substitution inverse dans le second, prend cette forme intégrable

$$\frac{\psi'(\alpha)\psi^{\text{IV}}(\alpha)-\psi'''(\alpha)\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)^2}+\frac{\pi'(\alpha)\pi^{\text{IV}}(\alpha)-\pi'''(\alpha)\pi''(\alpha)}{\pi'(\alpha)^2}=0,$$

d'où résulte

$$\frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}+\frac{\pi''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}=\text{constante}.$$

Comme on a déjà

$$\frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}=\frac{\pi''(\alpha)}{\pi'(\alpha)},$$

nous devons en conclure que

$$\frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}\quad\text{et}\quad\frac{\pi''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}$$

ont séparément des valeurs constantes. En conséquence, nous ferons

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)} = \frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)} = a^2,$$

la constante a pouvant être imaginaire.

En désignant par g, h, k des constantes qui peuvent aussi être imaginaires, l'équation linéaire

$$\psi'''(\alpha) = a^2 \psi'(\alpha)$$

donne, par l'intégration,

$$\psi(\alpha) = g e^{a\alpha} + h e^{-a\alpha} + k,$$

et l'on aura de même

$$\pi(\alpha) = g_1 e^{a\alpha} + h_1 e^{-a\alpha} + k_1.$$

En remplaçant α par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ dans $\psi(\alpha)$, et par $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ dans $\pi(\alpha)$, on obtiendra les valeurs de

$$x + y\sqrt{-1} = g e^{a(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + h e^{-a(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + k,$$

$$x - y\sqrt{-1} = g_1 e^{a(\alpha-\beta\sqrt{-1})} + h e^{-a(\alpha-\beta\sqrt{-1})} + k_1.$$

Mais la valeur de $x + y\sqrt{-1}$ doit fournir celle de $x - y\sqrt{-1}$ en substituant aux imaginaires a, g, h, k, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ les imaginaires conjuguées a', g', h', k', $\alpha - \beta\sqrt{-1}$. De là

$$x - y\sqrt{-1} = g' e^{a'(\alpha-\beta\sqrt{-1})} + h' e^{-a'(\alpha-\beta\sqrt{-1})} + k',$$

valeur qui ne peut s'accorder avec celle déjà donnée que si l'on a $a' = a$, ce qui suppose a réelle, ou $a' = -a$, ce qui suppose a de la forme $b\sqrt{-1}$. Mais, comme cette dernière hypothèse rentre dans la première en changeant α en β, et β en $-\alpha$, nous ne nous occuperons que de la première. De plus, dans la valeur de $x + y\sqrt{-1}$, nous supprimerons la constante k, ce qui revient à ajouter une simple constante aux coordonnées x, y; enfin, nous écrirons les imaginaires g, h sous la forme accoutumée

$$g = G e^{\varepsilon\sqrt{-1}}, \quad h = H e^{\varepsilon'\sqrt{-1}}.$$

Nous aurons ainsi

$$x + y\sqrt{-1} = Ge^{a\alpha + a\beta + \tau\sqrt{-1}} + He^{-a\alpha - a\beta - \tau\sqrt{-1}}.$$

Mais cette formule peut encore être simplifiée. Multiplions, en effet, les deux membres par $e^{\delta\sqrt{-1}}$, où nous supposons

$$\delta = -\tfrac{1}{2}(\sigma + \tau),$$

et faisons

$$x\cos\delta - y\sin\delta = x_1, \quad x\sin\delta + y\cos\delta = y_1, \quad \tfrac{1}{2}(\sigma - \tau) = a\omega;$$

nous obtiendrons

$$x_1 + y_1\sqrt{-1} = Ge^{a[\alpha + \beta + \omega\sqrt{-1}]} + He^{-a[\alpha + \beta + \omega\sqrt{-1}]}.$$

Il est clair que x_1, y_1 sont les coordonnées du point M par rapport à des axes rectangulaires comme les anciens. En adoptant d'avance ces axes, x_1 et y_1 se réduiront à x et y. On trouvera alors, en séparant les quantités réelles des imaginaires,

$$x = Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha}\cos a(\beta + \omega),$$

$$y = Ge^{a\alpha} - He^{-a\alpha}\sin a(\beta + \omega),$$

et ces formules, qui ne diffèrent de celles du numéro précédent que par le changement insignifiant de β en $\beta + \omega$, nous conduiront comme elles à des coniques homofocales et au système elliptique du § II.

Nous sommes donc en droit d'affirmer que ce système est le seul pour lequel on ait à la fois

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 - d\beta^2), \quad \text{et} \quad \lambda = f(\alpha) - F(\beta),$$

et, par conséquent, le seul dont nous puissions faire usage pour appliquer la méthode du § Ier au mouvement d'un point dans un plan. Nous avons déjà fait observer que les coordonnées rectangles ordinaires y sont comprises comme cas particulier, ainsi que les coordonnées polaires et les coordonnées paraboliques dont on a dit un mot à la fin du n° **10**.

§ IV.

17. Occupons-nous à présent du mouvement du point M sur une sphère de rayon ρ, ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Nous avons, dans le cas du plan, regardé chaque point M comme déterminé par la rencontre de deux coniques homofocales. Nous opérerons de la même manière sur la surface de la sphère; seulement nos coniques seront ici naturellement des coniques sphériques. Désignons par b et c deux constantes prises à volonté une fois pour toutes, c étant $> b$; et, pour exprimer x, y, z au moyen de deux variables μ et ν, prenons

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0, \quad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0.$$

En donnant à μ et ν diverses valeurs, on obtient par ces deux dernières équations deux systèmes de cônes qui se coupent à angle droit et qui déterminent sur la sphère deux systèmes, aussi orthogonaux, de coniques sphériques dont l'intersection donne les différents points de la surface. Les valeurs de x, y, z en μ et ν sont

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\rho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\rho\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

On suppose, bien entendu, $\nu^2 < b^2$, μ compris entre b et c, et on prend ν et les radicaux contenus dans les formules avec des signes convenables. Pour plus de clarté, introduisons deux angles θ et ψ, et posons

$$\nu = b\cos\theta, \quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}.$$

De là résultera

$$x = \frac{\rho\cos\theta}{c}\sqrt{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi},$$

$$y = \rho\sin\theta\cos\psi, \quad z = \frac{\rho\sin\theta}{c}\sqrt{c^2 - b^2\cos^2\psi}.$$

Les radicaux qui restent demeureront toujours positifs, et les signes de $\cos\theta$, etc., détermineront ceux de x, y, z, d'après les valeurs des angles θ et ψ. Pour parcourir la surface entière de la sphère, il suffit de faire

varier θ dans l'étendue d'une demi-circonférence et ψ dans l'étendue d'une circonférence entière. Si donc il s'agissait d'une intégration relative à cette surface, on prendrait o et π pour limites de θ, o et 2π pour limites de ψ; mais, dans le problème du mouvement d'un mobile, on peut être obligé de considérer des valeurs de θ et ψ plus grandes ou plus petites, et même des valeurs allant en croissant ou en décroissant indéfiniment.

Au reste, c'est dans les applications particulières que l'usage des angles θ et ψ peut surtout être utile. Tant que l'on demeure dans une certaine généralité, l'emploi des variables μ et ν me paraît plus commode.

18. D'après les valeurs de x, y, z, on trouve sans difficulté

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left[\frac{\rho^2 d\mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} + \frac{\rho^2 d\nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\right].$$

En comparant à la formule (10) du § Ier, on a donc ici

$$m = \frac{\rho^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}, \quad n = \frac{\rho^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2.$$

La valeur de λ (qui est, au reste, d'une forme entièrement semblable à celle pour le cas du plan se trouvant composée, comme le demande la méthode du paragraphe cité, d'une fonction de μ jointe à une fonction de ν, nous pourrons prendre pour λU une autre expression quelconque de la même espèce. Ainsi, toutes les fois que l'on aura

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu},$$

les équations du mouvement du point M sur la sphère se rameneront aux quadratures par nos formules.

D'après la valeur actuelle de λ, comparée à la première des formules (28) du n° 6, on peut prendre

$$\varphi(\mu) = \mu^2, \quad \varpi(\nu) = \nu^2,$$

et appliquer la formule (30). Ainsi l'équation de la trajectoire sera

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\sqrt{2f(\mu) + C\mu^2 - A}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\sqrt{A - 2F(\nu) - C\nu}}.$$

ou bien, en introduisant l'angle i de la formule (31),

$$[2f(\mu) + C\mu^2]\cos^2 i + [2F(\nu) + C\nu^2]\sin^2 i = A.$$

Ici i désigne l'angle que la trajectoire fait en chaque point avec la conique sphérique correspondante (μ). L'élément ds'' de cette conique a pour valeur

$$ds'' = \frac{\rho\sqrt{\mu^2-\nu^2}\,d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}},$$

et l'élément ds' de la conique orthogonale s'exprime par

$$ds' = \frac{\rho\sqrt{\mu^2-\nu^2}\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}.$$

enfin on a

$$\operatorname{tang} i = \sqrt{\frac{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,\frac{d\mu}{d\nu}.$$

Je ne m'étendrai pas sur les applications des formules relatives à la trajectoire. Je me bornerai au cas de

$$f(\mu) = 0, \quad F(\nu) = 0;$$

c'est celui d'un mobile qui n'est sollicité par aucune force accélératrice. Il est évident que la trajectoire est alors un grand cercle de la sphère. Les équations

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-a)(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(a-\nu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}},$$

et

$$\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i = a,$$

qui se déduisent des formules (32) et (33) propres à ce cas, représentent donc un grand cercle quelconque, et cela quelles que soient les valeurs attribuées à b et c. D'après la formule (34), l'élément ds de ce grand cercle s'exprime par

$$ds = \frac{\rho\,d\mu\sqrt{\mu^2-a}}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} + \frac{\rho\,d\nu\sqrt{a-\nu^2}}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

Remarquons enfin que les cercles en nombre infini qui répondent à

une même valeur de a sont tous tangents à la conique sphérique déterminée par l'équation $\mu^2 = a$ ou $\nu^2 = a$, suivant que l'on a $a > b^2$ ou $a < b^2$.

19. On peut introduire, au lieu de μ et ν, les angles ψ et θ dans la formule

$$U = \frac{F(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2},$$

qui devient ainsi

$$U = \frac{\text{Fonct.}(\psi) - \text{fonct.}(\theta)}{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi - b^2\cos^2\theta}.$$

Cette forme est la plus convenable pour la discussion des cas particuliers où l'on prend $b = 0$ ou $b = c$; le numérateur, en effet, reste le même, et le dénominateur peut être supposé égal à $\cos^2\psi$ dans le premier cas, et à $\sin^2\theta$ dans le second. Soit, pour fixer les idées, $b = c$; la valeur de U, pour laquelle la méthode du § Ier réussit, est

$$U = \frac{\text{Fonct.}(\psi) - \text{fonct.}(\theta)}{\sin^2\theta},$$

et l'on a d'ailleurs

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta\cos\psi, \quad z = \rho\sin\theta\sin\psi,$$

en sorte que θ et ψ sont les angles des coordonnées polaires ordinaires dans le cas de trois dimensions. En faisant Fonct. $(\psi) = 0$, la formule comprend encore, comme cas très-particulier, le pendule conique.

§ V.

20. L'extrême ressemblance qu'on a pu observer entre les formules pour le plan et celles pour la sphère, se conserve en passant à un ellipsoïde quelconque.

Soit

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde sur lequel le point M doit se mouvoir, et

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} + \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

celles des hyperboloïdes homofocaux qui en déterminent les lignes de courbure. Nous regarderons μ et ν comme des variables en fonction desquelles nous exprimerons x, y, z.

Un calcul très-simple donne

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}};$$

on doit donner aux diverses quantités entrant dans ces équations des signes convenables, comme l'indiqueront nettement, si l'on veut, les formules

$$x = \frac{\rho\cos\theta}{c}\sqrt{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi},$$

$$y = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sin\theta\cos\psi,$$

$$z = \sqrt{\rho^2 - c^2}.\frac{\sin\theta\sqrt{c^2 - b^2\cos^2\psi}}{c},$$

que l'on obtient en faisant, comme pour la sphère,

$$\nu = b\cos\psi, \quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}.$$

21. On trouve sans difficulté, d'après les valeurs de x, y, z,

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left[\frac{(\rho^2 - \mu^2)d\mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} + \frac{(\rho^2 - \nu^2)d\nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\right].$$

En comparant à la formule (10) du § Ier, on a donc ici

$$m = \frac{\rho^2 - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}, \quad n = \frac{\rho^2 - \nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2.$$

La valeur de λ ayant la forme voulue pour le succès de la méthode du paragraphe cité, il ne reste plus qu'à prendre λU de même forme, en posant

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Ainsi, toutes les fois que U sera susceptible d'une telle expression, les équations du mouvement d'un point matériel sur l'ellipsoïde se rameneront aux quadratures par nos formules. L'équation de la trajectoire sera, dans ce cas,

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}.d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\sqrt{2f(\mu) + C\mu^2 - A}} = \frac{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}.d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\sqrt{A - 2F(\nu) - C\nu^2}},$$

ou bien

$$[2f(\mu) + C\mu^2]\cos^2 i + [2F(\nu) + C\nu^2]\sin^2 i = A,$$

i étant l'angle que la trajectoire fait en chaque point (μ, ν) avec l'élément ds'' de la ligne de courbure correspondante (μ), je veux dire de la ligne de courbure qui passe par ce point et le long de laquelle la valeur de μ reste constante.

En faisant

$$f(\mu) = g\mu^4, \quad F(\nu) = g\nu^4,$$

on traiterait, comme il est aisé de le voir, le cas d'un point M attiré ou repoussé par le centre de l'ellipsoïde avec une force proportionnelle à la distance du point M à ce centre.

En faisant

$$f(\mu) = 0, \quad F(\nu) = 0,$$

on retrouve naturellement l'équation

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = a,$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\,.\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - a)}} = \frac{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}\,.\,d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)(a - \nu^2)}}$$

de la ligne géodésique tangente à la ligne de courbure que détermine, suivant la grandeur de a, l'une ou l'autre des deux équations $\mu^2 = a$, $\nu^2 = a$. Et pour l'élément ds de cette ligne on obtiendra la formule

$$ds = \frac{\sqrt{\rho^2 - a}\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}}\,d\mu + \frac{\sqrt{a - \nu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}\,d\nu,$$

qui rentre, au fond, dans celle que j'ai donnée autrefois, comme on peut s'en assurer, en ayant égard à la différence des notations et à l'équation entre μ et ν.

§ VI.

22. Nous dirons actuellement deux mots du cas où le point M se meut sur une surface de révolution quelconque.

Prenons l'axe de la surface pour axe des x, et désignons par u sa

distance au point M, en sorte que u soit une fonction de x fournie par l'équation du méridien. Représentons de plus par β l'angle que le méridien qui passe par le point M fait avec un méridien fixe. On aura

$$ds^2 = dx^2\left[1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right] + u^2 d\beta^2.$$

Si donc nous faisons

$$\alpha = \int \frac{du}{u}\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2},$$

il nous viendra

$$ds^2 = u^2 (d\alpha^2 + d\beta^2) = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

en posant $\lambda = u^2$. En comparant cette valeur de λ aux formules (17) du n° **6**, on prendra

$$\varphi(\alpha) = u^2, \quad \varpi(\beta) = 0,$$

et

$$U = \frac{f(\alpha) - F(\beta)}{u^2}.$$

Telle est la fonction des forces pour laquelle notre méthode d'intégration réussira.

Dans le cas particulier des lignes géodésiques, on trouvera pour équation de la trajectoire

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{u^2 - a}} = \frac{d\beta}{\sqrt{a}},$$

ce qui revient à l'équation connue

$$u \cos i = \text{constante},$$

où i désigne l'angle sous lequel la ligne géodésique coupe successivement les parallèles de la surface.

§ VII.

23. Nous prendrons pour dernier exemple la surface hélicoïde dont l'équation est

$$\frac{y}{x} = \text{tang } z.$$

Cette équation est satisfaite par

$$x = \mu \cos \nu, \quad y = \mu \sin \nu, \quad z = \nu,$$

ce qui donne

$$ds^2 = \mu^2 + 1 \left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 + 1} + d\nu^2 \right),$$

et permet l'application de nos formules en posant

$$\lambda = \mu^2 + 1, \quad m = \frac{1}{\mu^2 + 1}, \quad n = 1,$$

puis

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 + 1}.$$

Avec cette valeur de U l'équation de la trajectoire est

$$\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}\sqrt{2f(\mu) + C(\mu^2 + 1) - A}} = \frac{d\nu}{\sqrt{A - 2F(\nu)}}.$$

On déduit ce résultat de la formule (30) en y faisant $\varphi(\mu) = \mu^2 + 1$, $\varpi(\nu) = 0$, ce qui donne bien $\lambda = \varphi(\mu) - \varpi(\nu)$.

Dans le cas particulier des lignes géodésiques, les formules (32), (33) et (34) fournissent

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 + 1)(\mu^2 + 1 - a)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{a}}.$$

ou

$$(\mu^2 + 1)\cos^2 i + \sin^2 i = a.$$

pour l'équation de la trajectoire, et

$$ds = d\mu \frac{\sqrt{\mu^2 + 1 - a}}{\sqrt{\mu^2 + 1}} + d\nu \sqrt{a}$$

pour l'élément de son arc, qui s'exprime ainsi par une intégrale elliptique. Ici i désigne l'angle sous lequel la ligne géodésique coupe successivement les lignes de la surface pour lesquelles on a $\mu =$ constante; ces lignes sont des hélices : $\nu =$ constante donne des lignes droites. Pour

$$\mu^2 + 1 = a,$$

la formule dont l'angle i dépend donne

$$\sin^2 i = \frac{\mu^2+1-a}{\mu^2} = 0,$$

sauf le cas de $a = 1$. Les lignes géodésiques en nombre infini qui répondent à une même valeur de a sont donc, en général, toutes tangentes à l'hélice déterminée par l'équation

$$\mu^2 + 1 = a,$$

et quoique cette hélice ne soit pas une ligne de courbure, on peut prévoir qu'elles ont des propriétés analogues jusqu'à un certain point à celles des lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure sur l'ellipsoïde.

§ VIII.

24. La méthode que j'ai développée dans ce Mémoire est une simple extension de celle dont j'avais fait usage dans mes premières recherches sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde, en cherchant à démontrer une belle formule de M. Jacobi. Elle me paraît propre à entrer dans les Traités élémentaires, et c'est surtout par cette raison que je m'y suis arrêté avec quelque détail. Il m'a semblé d'ailleurs utile de montrer comment l'analyse même des équations du mouvement d'un point dans un plan aurait pu conduire d'une manière très-directe à ces coordonnées elliptiques auxquelles les géomètres ont reconnu tant de propriétés, et qui, du reste, ont été d'abord employées précisément dans un problème de mécanique. Dans un second Mémoire je traiterai par une autre méthode (mais toujours en prenant mon point de départ dans les recherches de M. Jacobi) la question du mouvement d'un point libre dans l'espace. Je montrerai en particulier que les intégrations s'effectuent quand le mobile est sollicité parallèlement à trois axes Ox, Oy, Oz, rectangulaires ou obliques, par les forces respectives

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}, \quad \frac{dU}{dz},$$

U étant une fonction de x, y, z, exprimée par la formule

$$U = \frac{(\mu^2-\nu^2)f(\rho)+(\rho^2-\nu^2)F(\mu)+(\rho^2-\mu^2)\varphi(\nu)}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)},$$

où ρ, μ, ν sont des fonctions de x, y, z déterminées par l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c} = 1,$$

qui est du troisième degré en ρ^2 et dont ρ^2, μ^2, ν^2 désignent les trois racines; b, c sont des constantes quelconques, et $f(\rho)$, $F(\mu)$, $\varphi(\nu)$ des fonctions quelconques aussi de leurs variables respectives. Je ne sache pas que M. Jacobi ait donné ce théorème, mais on le démontre facilement en faisant usage d'une équation aux différences partielles, conformément à la théorie développée par l'illustre géomètre dans le tome III du présent Journal.

Note relative au Mémoire précédent;

PAR M. J. BERTRAND.

Quand il s'agit du mouvement d'un point sur un plan, le système de coordonnés curvilignes adopté par M. Liouville est tel que les courbes désignées par

$$\alpha = \text{constante}, \quad \beta = \text{constante},$$

sont deux systèmes isothermes conjugués; cela résulte de la remarque faite à la page 348, d'après laquelle ces courbes peuvent partager le plan en carrés infiniment petits; de plus, en consultant une Note insérée par M. Liouville au tome VIII de ce Journal (page 265), on verra sans peine que α et β doivent représenter les températures correspondantes à ces systèmes de courbes isothermes. D'après cela, le problème résolu dans le § III du Mémoire précédent peut s'énoncer de la manière suivante :

« Trouver un système de courbes isothermes AA′, BB′,..., tel que » l'inverse du carré du flux de la chaleur, en chaque point, soit re- » présenté par

$$f(V) + \varphi(V'),$$

» V et V′ étant les températures correspondantes au système donné et » à ses trajectoires orthogonales AB, A′B′, etc. »

Concevons quatre courbes appartenant aux deux systèmes conjugués et formant un rectangle de dimensions finies ABA′B′; puis quatre autres courbes infiniment voisines des quatre premières, tellement espacées que ces huit lignes déterminent, par leur intersection, quatre carrés infiniment petits, dont je représenterai les côtés par a, b, a', b'. En désignant par Fa, Fb, Fa', Fb' les flux de chaleur qui correspondent aux quatre points A, B, A′, B′, la condition proposée revient à

dire que l'on a

$$\frac{1}{Fa^2} - \frac{1}{Fb^2} = \frac{1}{Fa'^2} - \frac{1}{Fb'^2};$$

mais

$$\frac{1}{Fa} = \frac{1}{Fb}\left(\frac{a}{b}\right), \quad \frac{1}{Fa'} = \frac{1}{Fb'}\left(\frac{a'}{b'}\right);$$

donc

$$\frac{1}{Fa^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{1}{Fa'^2}\left(1 - \frac{b'^2}{a'^2}\right);$$

d'ou l'on conclut que le premier membre doit être indépendant de la position du point A sur la ligne AA'.

Si maintenant BB' se rapproche indéfiniment de AA', on pourra poser

$$a = ds, \quad b = ds - d^2s,$$

et nous aurons

$$\frac{1}{Fa^2}\frac{d^2s}{ds} = \text{constante}.$$

Mais j'ai montré, tome IX de ce Journal (page 131), que

$$\frac{d^2s}{ds} = \frac{ds}{R}.$$

R désignant le rayon de courbure de AA', et, comme ds est en raison inverse du flux Fa, il s'ensuit

$$R = \frac{1}{Fa^3}.$$

Donc le théoreme démontré par M. Liouville peut s'énoncer de la manière suivante :

Les courbes isothermes du second degré et homofocales sont les seules pour lesquelles le rayon de courbure soit, en chaque point, en raison inverse du cube du flux de chaleur.

Ce théorème, auquel M. Liouville a été conduit en s'occupant d'une question de dynamique, a un intérêt particulier dans la théorie des courbes isothermes, car la propriété en question est analogue à une propriété nécessaire des surfaces isothermes orthogonales; il était donc tout naturel de se demander dans quels cas elle subsiste pour les courbes isothermes orthogonales.

OEUVRES MATHÉMATIQUES

D'ÉVARISTE GALOIS.

AVERTISSEMENT.

Le géometre ingénieux et profond, dont nous donnons ici les œuvres, est mort ayant vingt ans à peine; et encore a-t-il dépensé stérilement, dans les agitations de la politique, au milieu des clubs ou sous les verrous de Sainte-Pélagie, la plus grande partie des deux dernieres années d'une vie si courte. Il était né le 26 octobre 1811; et au mois de mai 1832 un fatal duel, venu sans doute à la suite de quelque querelle frivole, l'enleva aux sciences mathématiques, qu'il aurait cultivées avec tant d'éclat!

Le principal travail d'Évariste Galois a pour objet les conditions de résolubilité des équations par radicaux. L'auteur y pose les bases d'une théorie générale qu'il applique en détail aux équations dont le degré est un nombre premier. Dès l'âge de seize ans, et sur les bancs du collége Louis-le-Grand, où ses heureuses dispositions furent encouragées par un excellent professeur, par un excellent homme, M. Richard [*], Galois s'était occupé de ce sujet difficile. Il présenta successivement à l'Académie plusieurs Mémoires contenant les résultats de ses méditations; mais, à part quelques fragments, quelques notes, il ne nous reste

[*] M. Le Verrier, M. Hermite, et d'autres savants distingués, ont suivi la classe de M. Richard. Les bons élèves font la gloire du maître.

aujourd'hui que celui qu'il remit en dernier lieu, le 17 janvier 1831. Les Commissaires [*], dans leur Rapport, reprochèrent au jeune analyste une rédaction obscure, et ce reproche qu'on avait adressé déjà (Galois lui-même nous l'apprend) à ses précédentes communications, était fondé, il faut l'avouer. Un désir exagéré de concision fut la cause de ce défaut que l'on doit surtout tâcher d'éviter en traitant les matières abstraites et mystérieuses de l'Algèbre pure. La clarté est, en effet, d'autant plus nécessaire, qu'on a dessein d'entraîner le lecteur plus loin des routes battues et dans des contrées plus arides. « Quand » il s'agit de questions transcendantes, soyez, disait Descartes, trans- » cendentalement clairs. » Galois a trop souvent négligé ce précepte; et nous comprenons que d'illustres géomètres aient jugé convenable d'essayer de ramener au droit chemin, par la sévérité de leurs sages conseils, un débutant plein de génie, mais inexpérimenté. L'auteur qu'ils censuraient était devant eux, ardent, actif, il pouvait profiter de leurs avis.

Mais à présent tout est changé. Galois n'est plus! Gardons-nous bien de le poursuivre d'inutiles critiques; laissons là les défauts, voyons les qualités.

Lorsque, cédant au vœu des amis d'Évariste, je me suis livré, pour ainsi dire sous les yeux de son frère [**], à l'étude attentive de toutes les pièces imprimées ou manuscrites qu'il a laissées, j'ai donc cru devoir me proposer comme but unique de rechercher, de démêler, pour le faire ensuite ressortir de mon mieux, ce qu'il y a de neuf

---

[*] MM. Lacroix et Poisson rapporteur. On peut voir quelles étaient les conclusions (un peu sèches) du Rapport par la manière dont M. Lacroix s'exprime dans la sixième édition de ses *Compléments des Éléments d'Algèbre*, page 345 : « En 1831, un jeune » Français, Évariste Galois, mort l'année suivante, avait annoncé, dans un Mémoire » présenté à l'Académie des Sciences, que, *pour qu'une équation irréductible de degré* » *premier soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que deux quelconques des racines* » *étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement;* mais ce Mémoire parut à » peu près inintelligible aux Commissaires chargés de l'examiner. »

[**] M. Alfred Galois.

dans ces productions. Mon zèle a été bientôt récompensé, et j'ai joui d'un vif plaisir au moment où, après avoir comblé de légères lacunes, j'ai reconnu l'exactitude entière de la méthode par laquelle Galois prouve, en particulier, ce beau théorème : *Pour qu'une équation irréductible de degré premier soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que toutes les racines soient des fonctions rationnelles de deux quelconques d'entre elles.* Cette méthode, vraiment digne de l'attention des géomètres, suffirait seule pour assurer à notre compatriote un rang dans le petit nombre des savants qui ont mérité le titre d'inventeurs

Nous reproduirons d'abord les divers articles publiés par Galois, de 1828 à 1830, dans les *Annales* de M. Gergonne et dans le *Bulletin des Sciences* de M. Férussac. Puis viendront les pièces inédites, et enfin un commentaire où nous nous proposons de compléter certains passages et d'éclaircir quelques points délicats.

La veille de sa mort, et dans la prévision du sort funeste qui l'attendait, Galois traça rapidement le résumé des grandes idées dont il était occupé, et adressa, sous forme de lettre, à son meilleur ami, M. Auguste Chevalier, ce dernier écrit, sorte de testament scientifique, que nous placerons comme préface des œuvres posthumes, et qu'on ne lira pas sans émotion en songeant dans quelle circonstance il fut composé. Cette Lettre a été insérée, en 1832, dans la *Revue encyclopédique*, numéro de septembre, page 568. Une Notice nécrologique sur Galois, par M. Auguste Chevalier, a paru dans le même numéro, page 744. Nous n'avons pas cru à propos de la faire entrer dans notre collection. Elle renferme des détails intéressants, mais, pour la plupart, étrangers à la science. Et certaines assertions, certains jugements trop absolus concernant les personnes et les choses, appelleraient peut-être des contradicteurs. Il est vrai qu'aux yeux mêmes de ceux qui s'éloigneraient le plus de ses opinions, l'auteur de cette Notice a d'avance trouvé son excuse dans la tendre amitié qui l'unissait à Galois. Quant à nous, qui n'avons ni connu, ni même jamais vu ce malheureux jeune homme, nous nous renfermerons dans notre rôle de géomètre, et les observations que nous pourrons nous permettre

en publiant ses œuvres sous l'inspiration de sa famille, ne porteront que sur les mathématiques.

Toul, le 30 octobre 1846

J. Liouville.

Nota. Les exigences de nos publications ordinaires et l'étendue des œuvres de Galois nous empêchant de réunir ces œuvres en un seul faisceau, nous les donnerons en deux fois, partie dans ce volume et partie dans le suivant.

Articles publiés par Galois dans les Annales de Mathématiques *de M. Gergonne.*

Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques [*].

On sait que si, par la méthode de Lagrange, on développe en fraction continue une des racines d'une équation du second degré, cette fraction continue sera périodique, et qu'il en sera encore de même de l'une des racines d'une équation de degré quelconque, si cette racine est racine d'un facteur rationnel du second degré du premier membre de la proposée, auquel cas cette équation aura, tout au moins, une autre racine qui sera également périodique. Dans l'un et dans l'autre cas, la fraction continue pourra d'ailleurs être immédiatement périodique ou ne l'être pas immédiatement; mais, lorsque cette dernière circonstance aura lieu, il y aura du moins une des transformées dont une des racines sera immédiatement périodique.

Or, lorsqu'une équation a deux racines périodiques, répondant à un même facteur rationnel du second degré, et que l'une d'elles est immédiatement périodique, il existe entre ces deux racines une relation assez singulière qui paraît n'avoir pas encore été remarquée, et qui peut être exprimée par le théorème suivant :

THÉORÈME. *Si une des racines d'une équation de degré quelconque est une fraction continue immédiatement périodique, cette équation aura nécessairement une autre racine également périodique que l'on obtiendra en divisant l'unité négative par cette même fraction continue périodique, écrite dans un ordre inverse.*

Démonstration. Pour fixer les idées, ne prenons que des périodes de quatre termes; car la marche uniforme du calcul prouve qu'il en serait de même si nous en admettions un plus grand nombre. Soit une

[*] Tome XIX des *Annales*, page 294 (1828-1829). Galois était alors élève au Collège Louis-le-Grand. (J. L.)

des racines d'une équation de degré quelconque exprimée comme il suit :

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}}}}}} \quad ;$$

l'équation du second degré, à laquelle appartiendra cette racine, et qui contiendra conséquemment sa corrélative, sera

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}}} \quad ;$$

or, on tire de là successivement

$$a - x = -\cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}}} \quad ; \qquad \cfrac{1}{a - x} = -\left(b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}}\right) \quad ;$$

$$b + \cfrac{1}{a - x} = -\cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}} \quad ; \qquad \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - x}} = -\left(c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}}\right) \quad ;$$

$$c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - x}} = -\cfrac{1}{d + \cfrac{1}{x}} \quad ; \qquad \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - x}}} = -\left(d + \cfrac{1}{x}\right) \quad ;$$

$$d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - x}}} = -\cfrac{1}{x} \quad ; \qquad \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - x}}}} = -x \quad ;$$

c'est-à-dire

$$x = -\cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a - x}}}}\;;$$

c'est donc toujours là l'équation du second degré qui donne les deux racines dont il s'agit; mais, en mettant continuellement pour x, dans son second membre, ce même second membre qui en est, en effet, la valeur, elle donne

$$x = -\cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \ldots}}}}}}}}\;.$$

c'est donc là l'autre valeur de x, donnée par cette équation, valeur qui, comme l'on voit, est égale à -1 divisé par la première.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que la racine proposée était plus grande que l'unité; mais, si l'on avait

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}}}}}}}\;.$$

on en conclurait, pour une des valeurs de $\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{x} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}}}}}}\;.$$

l'autre valeur de $\frac{1}{x}$ serait donc, par ce qui précède,

$$\frac{1}{x} = -\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}}}}},$$

d'où l'on conclurait, pour l'autre valeur de x,

$$x = -\left(d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}}}}\right)$$

ou

$$x = -1 : \cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}}}}};$$

ce qui rentre exactement dans notre théorème.

Soit A une fraction continue immédiatement périodique quelconque, et soit B la fraction continue qu'on en déduit en renversant la période : on voit que, si l'une des racines d'une équation est $x = A$, elle aura nécessairement une autre racine $x = -\frac{1}{B}$; or, si A est un nombre positif plus grand que l'unité, $-\frac{1}{B}$ sera négatif et compris entre 0 et -1; et, à l'inverse, si A est un nombre négatif compris entre 0 et -1,

$-\frac{1}{B}$ sera un nombre positif plus grand que l'unité. Ainsi, lorsque l'une des racines d'une équation du second degré est une fraction continue immédiatement périodique, plus grande que l'unité, l'autre est nécessairement comprise entre 0 et -1; et réciproquement, si l'une d'elles est comprise entre 0 et -1, l'autre sera nécessairement positive et plus grande que l'unité.

On peut prouver que, réciproquement, si l'une des deux racines d'une équation du second degré est positive, et plus grande que l'unité, et que l'autre soit comprise entre 0 et -1, ces racines seront exprimables en fractions continues immédiatement périodiques. En effet, soit toujours A une fraction continue immédiatement périodique quelconque, positive et plus grande que l'unité, et B la fraction continue immédiatement périodique qu'on en déduit, en renversant la période, laquelle sera aussi, comme elle, positive et plus grande que l'unité. La première des racines de la proposée ne pourra être de la forme

$$x = p + \frac{1}{A},$$

car alors, en vertu de notre théorème, la seconde devrait être

$$x = a - \frac{1}{-\frac{1}{B}} = a - B;$$

or $a - B$ ne saurait être compris entre 0 et 1 qu'autant que la partie entière de B serait égale à p, auquel cas la première valeur serait immédiatement périodique. On ne pourrait avoir davantage pour la première valeur de x, $x = p + \frac{1}{q + \frac{1}{A}}$, car alors l'autre serait

$$x = p + \frac{1}{q - B} \quad \text{ou} \quad x = p - \frac{1}{B - q}:$$

or, pour que cette valeur fût comprise entre 0 et -1, il faudrait d'abord que $\frac{1}{B-q}$ fût égal à p, plus une fraction. Il faudrait donc que $B - q$ fût plus petit que l'unité, ce qui exigerait que B fût égal à q, plus une fraction; d'où l'on voit que q et p devraient être respectivement égaux aux deux premiers termes de la période qui répond à B, ou aux

deux derniers de la période qui répond à A; de sorte que, contrairement à l'hypothèse, la valeur $x = p + \frac{1}{q + \frac{1}{A}}$ serait immédiatement périodique. On prouverait, par un raisonnement analogue, que les périodes ne sauraient être précédées d'un plus grand nombre de termes n'en faisant pas partie.

Lors donc que l'on traitera une équation numérique par la méthode de Lagrange, on sera sûr qu'il n'y a point de racines périodiques à espérer tant qu'on ne rencontrera pas une transformée ayant au moins une racine positive plus grande que l'unité, et une autre comprise entre 0 et -1; et si, en effet, la racine que l'on poursuit doit être périodique, ce sera tout au plus à cette transformée que les périodes commenceront.

Si l'une des racines d'une équation du second degré est non-seulement immédiatement périodique, mais encore symétrique, c'est-à-dire si les termes de la période sont égaux à égale distance des extrêmes, on aura $B = A$; de sorte que ces deux racines seront A et $-\frac{1}{A}$; l'équation sera donc

$$Ax^2 - (A^2 - 1)x - A = 0.$$

Réciproquement, toute équation du second degré de la forme

$$ax^2 - bx - a = 0$$

aura ses racines à la fois immédiatement périodiques et symétriques. En effet, en mettant tour à tour pour x l'infini et -1, on obtient des résultats positifs, tandis qu'en faisant $x = 1$ et $x = 0$, on obtient des résultats négatifs; d'où l'on voit d'abord que cette équation a une racine positive plus grande que l'unité et une racine négative comprise entre 0 et -1, et qu'ainsi ces racines sont immédiatement périodiques: de plus, cette équation ne change pas en y changeant x en $-\frac{1}{x}$; d'où il suit que, si A est une de ses racines, l'autre sera $-\frac{1}{A}$, et qu'ainsi, dans ce cas, $B = A$.

Appliquons ces généralités à l'équation du second degré

$$3x^2 - 16x + 18 = 0;$$

on lui trouve d'abord une racine positive comprise entre 3 et 4; en posant

$$x = 3 - \frac{1}{y},$$

on obtient la transformée

$$3y^2 - 2y - 3 = 0,$$

dont la forme nous apprend que les valeurs de y sont à la fois immédiatement périodiques et symétriques; en effet, en posant tour à tour

$$y = 1 + \frac{1}{z}, \qquad z = 2 + \frac{1}{t}, \qquad t = 1 - \frac{1}{u},$$

on obtient les transformées

$$2z^2 - 4z - 3 = 0, \quad 3t^2 - 4t - 2 = 0, \quad 3u^2 - 2u - 3 = 0.$$

L'identité entre les équations en u et en y prouve que la valeur positive de y est

$$y = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 - \cdots}}}}}$$

sa valeur négative sera donc

$$y = -\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 - \cdots}}}}}}$$

les deux valeurs de x seront donc

$$x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}} \qquad x = 3 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{1 - \cdots}}}}}}$$

dont la dernière, en vertu de la formule connue

$$p - \frac{1}{q} = p - 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{q - 1}},$$

devient

$$x = 1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}}$$

Notes sur quelques points d'Analyse [*].

§ I. — *Démonstration d'un théorème d'analyse.*

THÉORÈME. « Soient Fx et fx deux fonctions quelconques données : » on aura, quels que soient x et h,

$$\frac{F(x-h) - Fx}{f(x-h) - fx} = \varphi(k),$$

» φ étant une fonction déterminée, et k une quantité intermédiaire » entre x et $x - h$. »

Démonstration. Posons, en effet,

$$\frac{F(x-h) - Fx}{f(x-h) - fx} = P;$$

on en déduira

$$F(x-h) - Pf(x-h) = Fx - Pfx;$$

---

[*] *Annales*, tome XXI, page 182 (1830-1831). C'est par suite d'une faute d'impression qu'on y lit : *Galais, élève à l'École normale*, au lieu de *Galois*. J. L.

d'où l'on voit que la fonction $Fx - Pfx$ ne change pas quand on y change x en $x+h$; d'où il suit qu'à moins qu'elle ne reste constante entre ces limites, ce qui ne pourrait avoir lieu que dans des cas particuliers, cette fonction aura, entre x et $x+h$, un ou plusieurs maxima et minima. Soit k la valeur de x répondant à l'un d'eux; on aura évidemment

$$k = \psi(P),$$

ψ étant une fonction déterminée; donc on doit avoir aussi

$$P = \varphi(k),$$

φ étant une autre fonction également déterminée; ce qui démontre le théorème.

De là on peut conclure, comme corollaire, que la quantité

$$\lim. \frac{F(x+h) - Fx}{f(x+h) - fx} = \varphi(x),$$

pour $h = 0$, est nécessairement une fonction de x, ce qui démontre, à priori, l'existence des fonctions dérivées.

§ II — *Rayon de courbure des courbes dans l'espace.*

Le rayon de courbure d'une courbe en l'un quelconque de ses points M est la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'intersection du plan normal au point M avec le plan normal consécutif, comme il est aisé de s'en assurer par des considérations géométriques.

Cela posé, soit (x, y, z) un point de la courbe; on sait que le plan normal en ce point aura pour équation

$$(N) \qquad (X - x)\frac{dx}{ds} + (Y - y)\frac{dy}{ds} + (Z - z)\frac{dz}{ds} = 0,$$

X, Y, Z étant les symboles des coordonnées courantes. L'intersection de ce plan normal avec le plan normal consécutif sera donnée par le système de cette équation et de la suivante

$$(I) \qquad (X - x)\frac{d.\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} + (Y - y)\frac{d.\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} + (Z - z)\frac{d.\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = 1.$$

attendu que

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Or il est aisé de voir que le plan (I) est perpendiculaire au plan (N), car on a

$$\frac{dx}{ds}\,d.\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\,d.\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds}\,d.\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0;$$

donc la perpendiculaire abaissée du point (x, y, z) sur l'intersection des deux plans (N) et (I) n'est autre chose que la perpendiculaire abaissée du même point sur le plan (I). Le rayon de courbure est donc la perpendiculaire abaissée du point (x, y, z) sur le plan (I). Cette considération donne, très-simplement, les théorèmes connus sur les rayons de courbure des courbes dans l'espace.

Articles publiés par Galois dans le Bulletin des Sciences mathématiques *de M. Férussac.*

Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équations [*].

On appelle équations non primitives les équations qui étant, par exemple, du degré mn, se décomposent en m facteurs du degré n, au moyen d'une seule équation du degré m. Ce sont les équations de M. Gauss. Les équations primitives sont celles qui ne jouissent pas d'une pareille simplification. Je suis, à l'égard des équations primitives, parvenu aux résultats suivants :

1°. Pour qu'une équation de degré premier soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement.

2°. Pour qu'une équation primitive du degré m soit resoluble par radicaux, il faut que $m = p^\nu$, p étant un nombre premier.

3°. A part les cas mentionnés ci-dessous, pour qu'une équation primitive du degré p^ν soit résoluble par radicaux, il faut que deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement.

A la règle précédente échappent les cas très-particuliers qui suivent :

1°. Le cas de $m = p^\nu = 9, = 25$;

2°. Le cas de $m = p^\nu = 4$, et généralement celui où, a^α étant un diviseur de $\frac{p^\nu - 1}{p - 1}$, on aurait a premier, et

$$\frac{p^\nu - 1}{a^\alpha (p - 1)} \nu = p \quad \text{mod. } a^\alpha .$$

Ces cas s'écartent toutefois fort peu de la règle générale.

[*] *Bulletin*, tome XIII, page 271 (année 1830, cahier d'avril). (J. L.

Quand $m = 9, = 25$, l'équation devra être du genre de celles qui déterminent la trisection et la quintisection des fonctions elliptiques.

Dans le second cas, il faudra toujours que deux des racines étant connues, les autres s'en déduisent, du moins au moyen d'un nombre de radicaux, du degré p, égal au nombre des diviseurs a^α de $\frac{p^\prime - 1}{p - 1}$ qui sont tels que

$$\frac{p^\prime - 1}{a^\alpha(p-1)}\nu = p \pmod{a^\alpha}, \quad a \text{ premier.}$$

Toutes ces propositions ont été déduites de la théorie des permutations.

Voici d'autres résultats qui découlent de ma théorie.

1°. Soient k le module d'une fonction elliptique, p un nombre premier donné > 3; pour que l'équation du degré $p + 1$, qui donne les divers modules des fonctions transformées relativement au nombre p, soit résoluble par radicaux, *il faut* de deux choses l'une: ou bien qu'une des racines soit rationnellement connue, ou bien que toutes soient des fonctions rationnelles les unes des autres. Il ne s'agit ici, bien entendu, que des valeurs particulières du module k. Il est évident que la chose n'a pas lieu en général. Cette règle n'a pas lieu pour $p = 5$.

2°. Il est remarquable que l'équation modulaire générale du sixième degré, correspondant au nombre 5, peut s'abaisser à une du cinquième degré dont elle est la réduite. Au contraire, pour des degrés supérieurs, les équations modulaires ne peuvent s'abaisser [*].

[*] Cette assertion n'est pas tout à fait exacte, comme Galois en avertit lui-même dans sa Lettre à M. Auguste Chevalier, qu'on trouve plus bas. Il dit en général au sujet de l'article que nous reproduisons ici: La condition que j'ai indiquée dans le *Bulletin de Férussac* pour la solubilité par radicaux est trop restreinte; il y a peu d'exceptions, mais il y en a. Quant aux équations modulaires en particulier, il déclare l'abaissement du degré $p + 1$ au degré p possible, non-seulement pour $p = 5$, mais encore pour $p = 7$ et $p = 11$; mais il en maintient l'impossibilité pour $p > 11$. (J. L.)

Note sur la résolution des équations numériques [*].

M. Legendre a le premier remarqué que, lorsqu'une équation algébrique était mise sous la forme

$$\varphi x = x,$$

où φx est une fonction de x qui croît constamment en même temps que x, il était facile de trouver la racine de cette équation immédiatement plus petite qu'un nombre donné a, si $\varphi a < a$, et la racine immédiatement plus grande que a, si $\varphi a > a$.

Pour le démontrer, on construit la courbe $y = \varphi x$ et la droite $y = x$. Soit prise une abscisse $= a$, et supposons, pour fixer les idées, $\varphi a > a$, je dis qu'il sera aisé d'obtenir la racine immédiatement supérieure à a. En effet, les racines de l'équation $\varphi x = x$ ne sont que les abscisses des points d'intersection de la droite et de la courbe, et il est clair que l'on s'approchera du point le plus voisin d'intersection, en substituant à l'abscisse a l'abscisse φa. On aura une valeur plus approchée encore en prenant $\varphi\varphi a$, puis $\varphi\varphi\varphi a$, et ainsi de suite.

Soit $Fx = 0$ une équation donnée du degré n, et $Fx = X - Y$, X et Y n'ayant que des termes positifs. Legendre met successivement l'équation sous ces deux formes

$$x = \varphi x = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{Y}{x^n}\right)}}, \quad x = \psi x = \sqrt[n]{\frac{X}{\left(\frac{x^n}{Y}\right)}};$$

les deux fonctions φx et ψx sont toujours, comme on voit, l'une plus grande, l'autre plus petite que x. Ainsi, à l'aide de ces deux fonctions, on pourra avoir les deux racines de l'équation les plus approchées d'un nombre donné a, l'une en plus et l'autre en moins.

Mais cette méthode a l'inconvénient d'exiger, à chaque opération, l'extraction d'une racine $n^{ième}$. Voici deux formes plus commodes. Cherchons un nombre k tel, que la fonction

$$x + \frac{Fx}{kx^n}$$

[*] *Bulletin*, tome XIII, page 413, année 1830, cahier de juin. J. L.

croisse avec x, quand $x > 1$. Il suffit, en effet, de savoir trouver les racines d'une équation qui sont plus grandes que l'unité.)

Nous aurons, pour la condition proposée,

$$1 - \frac{d\,\frac{X-Y}{hx^n}}{dx} > 0, \quad \text{ou bien} \quad 1 - \frac{nX - xX'}{hx^{n+1}} + \frac{nY - xY'}{hx^{n+1}} > 0;$$

or on a identiquement

$$nX - xX' > 0, \quad nY - xY' > 0;$$

il suffit donc de poser

$$\frac{nX - xX'}{hx^{n+1}} < 1 \quad \text{pour} \quad x > 1,$$

et il suffit pour cela de prendre pour k la valeur de la fonction $nX - xX'$ relative à $x = 1$.

On trouvera de même un nombre h tel, que la fonction

$$x - \frac{Fx}{hx^n}$$

croîtra avec x quand x sera > 1, en changeant Y en X.

Ainsi, l'équation donnée pourra se mettre sous l'une des formes

$$x = x - \frac{Fx}{hx^n}, \quad x = x - \frac{Fx}{hx^n},$$

qui sont toutes deux rationnelles, et donnent pour la résolution une méthode facile.

Sur la théorie des nombres [*].

Quand on convient de regarder comme nulles toutes les quantités qui, dans les calculs algébriques, se trouvent multipliées par un nom-

---

[*] *Bulletin*, tome XIII, page 428 (année 1830, cahier de juin). Avec la Note suivante : Ce Mémoire fait partie des recherches de M. Galois sur la théorie des permutations et des équations algébriques. (J. L.)

bre premier donné p, et qu'on cherche, dans cette convention, les solutions d'une équation algébrique $Fx = 0$, ce que M. Gauss désigne par la notation $Fx \equiv 0$, on n'a coutume de considérer que les solutions entières de ces sortes de questions. Ayant été conduit par des recherches particulières à considérer les solutions incommensurables, je suis parvenu à quelques résultats que je crois nouveaux.

Soit une pareille équation ou congruence, $Fx = 0$, et p le module. Supposons d'abord, pour plus de simplicité, que la congruence en question n'admette aucun facteur commensurable, c'est-à-dire qu'on ne puisse pas trouver trois fonctions φx, ψx, χx telles que

$$\varphi x . \psi x = Fx + p\chi x.$$

Dans ce cas, la congruence n'admettra donc aucune racine entière, ni même aucune racine incommensurable de degré inférieur. Il faut donc regarder les racines de cette congruence comme des espèces de symboles imaginaires, puisqu'elles ne satisfont pas aux questions des nombres entiers, symboles dont l'emploi, dans le calcul, sera souvent aussi utile que celui de l'imaginaire $\sqrt{-1}$ dans l'analyse ordinaire.

C'est la classification de ces imaginaires, et leur réduction au plus petit nombre possible, qui va nous occuper.

Appelons i l'une des racines de la congruence $Fx = 0$, que nous supposerons du degré ν.

Considérons l'expression générale

$$(A) \qquad a + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots + a_{\nu-1} i^{\nu-1},$$

où $a, a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ représentent des nombres entiers. En donnant à ces nombres toutes les valeurs, l'expression (A) en acquiert p^ν, qui jouissent, ainsi que je vais le faire voir, des mêmes propriétés que les nombres naturels dans la *théorie des résidus des puissances*.

Ne prenons des expressions (A) que les $p^\nu - 1$ valeurs où a, $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ ne sont pas toutes nulles : soit α l'une de ces expressions.

Si l'on élève successivement α aux puissances 2e, $3^e, \ldots$, on aura une suite de quantités de même forme [parce que toute fonction de i peut se réduire au $(\nu - 1)^{ième}$ degré]. Donc on devra avoir $\alpha^n = 1$, n étant un certain nombre; soit n le plus petit nombre qui soit tel que l'on ait

$\alpha^n = 1$. On aura un ensemble de n expressions toutes différentes entre elles.

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3, \ldots,\ \alpha^{n-1}.$$

Multiplions ces n quantités par une autre expression β de la même forme. Nous obtiendrons encore un nouveau groupe de quantités toutes différentes des premières, et différentes entre elles. Si les quantités (A) ne sont pas épuisées, on multipliera encore les puissances de α par une nouvelle expression γ, et ainsi de suite. On voit donc que le nombre n divisera nécessairement le nombre total des quantités (A). Ce nombre étant $p^\nu - 1$, on voit que n divise $p^\nu - 1$. De là suit encore que l'on aura

$$\alpha^{p^\nu - 1} = 1, \quad \text{ou bien} \quad \alpha^{p^\nu} = \alpha.$$

Ensuite on prouvera, comme dans la théorie des nombres, qu'il y a des racines primitives α, pour lesquelles on ait précisément $p^\nu - 1 = n$, et qui reproduisent par conséquent, par l'élévation aux puissances, toute la suite des autres racines.

Et l'une quelconque de ces racines primitives ne dépendra que d'une congruence du degré 1, congruence *irréductible*, sans quoi l'équation en i ne le serait pas non plus, parce que les racines de la congruence en i sont toutes des puissances de la racine primitive.

On voit ici cette conséquence remarquable, que toutes les quantités algébriques qui peuvent se présenter dans la théorie sont racines d'équations de la forme

$$x^{p^\nu} = x.$$

Cette proposition, énoncée algébriquement, est celle-ci : Etant donnés une fonction $\mathrm{F}x$ et un nombre premier p, on peut poser

$$fx.\mathrm{F}x = x^{p^\nu} - x + p\varphi x,$$

fx et φx étant des fonctions entières, toutes les fois que la congruence $\mathrm{F}x \equiv 0 \pmod{p}$ sera irréductible.

Si l'on veut avoir toutes les racines d'une pareille congruence au moyen d'une seule, il suffit d'observer que l'on a généralement

$$(\mathrm{F}x)^{p^n} = \mathrm{F}(x^{p^n})$$

et que, par conséquent, l'une des racines étant x, les autres seront

$$x^p,\ x^{p^2},\ldots,\ x^{p^{\nu-1}} \quad [*].$$

Il s'agit maintenant de faire voir que, réciproquement à ce que nous venons de dire, les racines de l'équation ou de la congruence $x^{p^\nu} = x$ dépendront toutes d'une seule congruence du degré ν.

Soit en effet i une racine d'une congruence irréductible, et telle que toutes les racines de la congruence $x^{p^\nu} = x$ soient fonctions rationnelles de i. (Il est clair qu'ici, comme dans les équations ordinaires, cette propriété a lieu) [**].

Il est d'abord évident que le degré μ de la congruence en i ne saurait être plus petit que ν, sans quoi la congruence

$$(\nu) \qquad x^{p^{\nu-1}} - 1 = 0$$

---

[*] De ce que les racines de la congruence irréductible de degré ν

$$Fx = 0$$

sont exprimées par la suite

$$x,\quad x^p,\quad x^{p^2},\ldots,\quad x^{p^{\nu-1}},$$

on aurait tort de conclure que ces racines soient toujours des quantités exprimables par radicaux. Voici un exemple du contraire :

La congruence irréductible

$$x^2 + x - 1 = 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$

donne

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

qui se réduit à

$$\frac{0}{0}, \qquad (\text{mod. } 2)$$

formule qui n'apprend rien.

[**] La proposition générale dont il s'agit ici peut s'énoncer ainsi : Étant donnée une équation algébrique, on pourra trouver une fonction rationnelle θ de toutes ses racines, de telle sorte que, réciproquement, chacune des racines s'exprime rationnellement en θ. Ce théorème était connu d'Abel, ainsi qu'on peut le voir par la première partie du Mémoire que ce célèbre géomètre a laissé sur les fonctions elliptiques.

aurait toutes ses racines communes avec la congruence

$$x^{p^{\mu}-1} - 1 = 0,$$

ce qui est absurde, puisque la congruence (ν) n'a pas de racines égales, comme on le voit en prenant la dérivée du premier membre. Je dis maintenant que μ ne peut non plus être $> \nu$.

En effet, s'il en était ainsi, toutes les racines de la congruence

$$x^{p^{\mu}} = x$$

devraient dépendre rationnellement de celles de la congruence

$$x^{p^{\nu}} = x.$$

Mais il est aisé de voir que si l'on a

$$i^{p^{\nu}} = i,$$

toute fonction rationnelle $h = fi$ donnera encore

$$(fi)^{p^{\nu}} = f(i^{p^{\nu}}) = fi, \quad \text{d'où} \quad h^{p^{\nu}} = h.$$

Donc toutes les racines de la congruence $x^{p^{\mu}} = x$ lui seraient communes avec l'équation $x^{p^{\nu}} = x$. Ce qui est absurde.

Nous savons donc enfin que toutes les racines de l'équation ou congruence $x^{p^{\nu}} = x$ dépendent nécessairement d'une *seule* congruence *irréductible* de degré ν.

Maintenant, pour avoir cette congruence irréductible d'où dépendent les racines de la congruence $x^{p^{\nu}} = x$, la méthode la plus générale sera de délivrer d'abord cette congruence de tous les facteurs communs qu'elle pourrait avoir avec des congruences de degré inférieur et de la forme

$$x^{p^{\mu}} = x.$$

On obtiendra ainsi une congruence qui devra se partager en congruences irréductibles de degré ν. Et, comme on sait exprimer toutes les racines de chacune de ces congruences irréductibles au moyen d'une seule, il sera aisé de les obtenir toutes par la méthode de M. Gauss.

Le plus souvent, cependant, il sera aisé de trouver par le tâtonnement une congruence irréductible d'un degré donné ν, et l'on doit en déduire toutes les autres.

Soient, pour exemple, $p = 7$, $\nu = 3$. Cherchons les racines de la congruence

$$(1) \qquad x^{7^2} = x \pmod{7}.$$

J'observe que la congruence

$$(2) \qquad i^3 = 2 \pmod{7}$$

étant irréductible, et du degré 3, toutes les racines de la congruence (1) dépendent rationnellement de celle de la congruence (2), en sorte que toutes les racines de (1) sont de la forme

$$(3) \qquad a + a_1 i + a_2 i^2, \quad \text{ou bien} \quad a + a_1 \sqrt{2} + a_2 \sqrt{4}.$$

Il faut maintenant trouver une racine primitive, c'est-à-dire une forme de l'expression (3) qui, élevée à toutes les puissances, donne toutes les racines de la congruence

$$x^{7^2-1} = 1, \quad \text{savoir} \quad x^{2^2.3^2.19} = 1 \pmod{7},$$

et nous n'avons besoin pour cela que d'avoir une racine primitive de chaque congruence

$$x^2 = 1, \quad x^{3^2} = 1, \quad x^{19} = 1.$$

La racine primitive de la première est -1; celles de $x^{3^2} - 1 = 0$ sont données par les équations

$$x^3 = 2, \quad x^3 = 4,$$

en sorte que i est une racine primitive de $x^{3^2} = 1$.

Il ne reste qu'à trouver une racine de $x^{19} - 1 = 0$, ou plutôt de

$$\frac{x^{19} - 1}{x - 1} = 0,$$

et essayons pour cela si l'on ne peut pas satisfaire à la question en posant simplement $x = a + a_1 i$, au lieu de $a + a_1 i + a_2 i^2$; nous de-

vrons avoir

$$(a + a_1 i)^{19} = 1,$$

ce qui, en développant par la formule de Newton, et réduisant les puissances de a, de a_1 et de i, par les formules

$$a^{m(p-1)} = 1, \quad a_1^{n(p-1)} = 1, \quad i^3 = 2,$$

se réduit à

$$3[a - a^4 a_1^3 + (a^5 a_1^2 + a^2 a_1^5) i^2] = 1.$$

d'où, en séparant,

$$3a - 3a^4 a_1^3 = 1, \quad a^5 a_1^2 + a^2 a_1^5 = 0.$$

Ces deux dernières équations sont satisfaites en posant $a = -1$, $a_1 = 1$. Donc

$$-1 + i$$

est une racine primitive de $x^{19} = 1$. Nous avons trouvé plus haut, pour racines primitives de $x^2 = 1$ et de $x^{3^2} = 1$, les valeurs -1 et i; il ne reste plus qu'à multiplier entre elles les trois quantités

$$-1, \quad i, \quad -1 + i,$$

et le produit $i - i^2$ sera une racine primitive de la congruence

$$x^{7^3-1} = 1.$$

Donc ici l'expression $i - i^2$ jouit de la propriété, qu'en l'élevant à toutes les puissances, on obtiendra $7^3 - 1$ expressions différentes et de la forme

$$a + a_1 i + a_2 i^2.$$

Si nous voulons avoir la congruence de moindre degré d'où dépend notre racine primitive, il faut éliminer i entre les deux équations

$$i^3 = 2, \quad \alpha = i - i^2.$$

On obtient ainsi

$$\alpha^3 - \alpha + 2 = 0.$$

Il sera convenable de prendre pour base des imaginaires et de re-

présenter par i la racine de cette équation, en sorte que

$$(i) \qquad i^3 - i + 2 = 0,$$

et l'on aura toutes les imaginaires de la forme

$$a + a_1 i + a_2 i^2,$$

en élevant i à toutes les puissances, et réduisant par l'équation (i).

Le principal avantage de la nouvelle théorie que nous venons d'exposer est de ramener les congruences à la propriété (si utile dans les équations ordinaires) d'admettre précisément autant de racines qu'il y a d'unités dans l'ordre de leur degré.

La méthode pour avoir toutes ces racines sera très-simple. Premièrement on pourra toujours préparer la congruence donnée $Fx = 0$, de manière à ce qu'elle n'ait plus de racines égales, ou, en d'autres termes, à ce qu'elle n'ait plus de facteur commun avec $F'x = 0$, et le moyen de le faire est évidemment le même que pour les équations ordinaires.

Ensuite, pour avoir les solutions entières, il suffira, ainsi que M. Libri paraît en avoir fait le premier la remarque, de chercher le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p-1} = 1$.

Si maintenant on veut avoir les solutions imaginaires du second degré, on cherchera le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p^2-1} = 1$, et, en général, les solutions de l'ordre ν seront données par le plus grand commun diviseur à $Fx = 0$ et à $x^{p^\nu-1} = 1$.

C'est surtout dans la théorie des permutations, où l'on a sans cesse besoin de varier la forme des indices, que la considération des racines imaginaires des congruences paraît indispensable. Elle donne un moyen simple et facile de reconnaître dans quel cas une équation primitive est soluble par radicaux, comme je vais essayer d'en donner en deux mots une idée.

Soit une équation algébrique $fx = 0$ de degré p^ν; supposons que les p^ν racines soient désignées par x_k, en donnant à l'indice k les p^ν valeurs déterminées par la congruence $k^{p^\nu} = k \pmod{p}$.

Prenons une fonction quelconque rationnelle V des p^ν racines x_k. Transformons cette fonction en substituant partout à l'indice k l'in-

dice $ak + b)^{p^r}$, a, b, r étant des constantes arbitraires satisfaisant aux conditions de $a^{p^r-1} = 1$, $b^{p^r} = b$ (mod. p et de r entier.

En donnant aux constantes a, b, r toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, on obtiendra en tout $p^\nu(p^\nu - 1)\nu$ manières de permuter les racines entre elles par des substitutions de la forme $[x_k, x_{(ak+b)^{p^r}}]$, et la fonction V admettra en général par ces substitutions $p^\nu(p^\nu - 1)\nu$ formes différentes.

Admettons maintenant que l'équation proposée $fx = 0$ soit telle, que toute fonction des racines invariable par les $p^\nu(p^\nu - 1)\nu$ permutations que nous venons de construire, ait pour cela même une valeur numérique rationnelle.

On remarque que, dans ces circonstances, l'équation $fx = 0$ sera soluble par radicaux, et, pour parvenir à cette conséquence, il suffit d'observer que la valeur substituée à k, dans chaque indice, peut se mettre sous les trois formes

$$ak + b)^{p^r} = (a'k + b')^{p^r} = a''k^{p^r} + b'' = a'''k + b'''^{p^r}.$$

Les personnes habituées à la théorie des équations le verront sans peine.

Cette remarque aurait peu d'importance si je n'étais parvenu à démontrer que, réciproquement, une équation primitive ne saurait être soluble par radicaux, à moins de satisfaire aux conditions que je viens d'énoncer. (J'excepte les équations du neuvième et du vingt-cinquième degré.

Ainsi, pour chaque nombre de la forme p^ν, on pourra former un groupe de permutations tel, que toute fonction des racines invariable par ces permutations devra admettre une valeur rationnelle quand l'équation de degré p_ν sera primitive et soluble par radicaux.

D'ailleurs, il n'y a que les équations d'un pareil degré p^ν qui soient à la fois primitives et solubles par radicaux.

Le théorème général que je viens d'énoncer précise et développe les conditions que j'avais données dans le *Bulletin* du mois d'avril. Il indique le moyen de former une fonction des racines dont la valeur sera rationnelle, toutes les fois que l'équation primitive de degré p^ν sera soluble par radicaux, et mène, par conséquent, aux caractères de réso-

lubilité de ces équations, par des calculs sinon praticables, du moins qui sont possibles en théorie.

Il est à remarquer que, dans le cas où $\nu = 1$, les diverses valeurs de k ne sont autre chose que la suite des nombres entiers. Les substitutions de la forme (x_k, x_{ak+b}) seront au nombre de $p(p-1)$.

La fonction qui, dans le cas des équations solubles par radicaux, doit avoir une valeur rationnelle, dépendra, en général, d'une équation de degré $1.2.3\ldots(p-2)$, à laquelle il faudra, par conséquent, appliquer la méthode des racines rationnelles.

Lettre de Galois à M. Auguste Chevalier [*].

(Insérée en 1832 dans la *Revue encyclopédique*, numéro de septembre, page 568.)

Mon cher ami,

J'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles.

Les unes concernent la théorie des équations; les autres, les fonctions intégrales.

Dans la théorie des équations, j'ai recherché dans quels cas les équations étaient résolubles par des radicaux, ce qui m'a donné occasion d'approfondir cette théorie, et de décrire toutes les transformations possibles sur une équation, lors même qu'elle n'est pas soluble par radicaux.

On pourra faire avec tout cela trois Mémoires.

Le premier est écrit, et, malgré ce qu'en a dit Poisson, je le maintiens, avec les corrections que j'y ai faites.

Le second contient des applications assez curieuses de la théorie des équations. Voici le résumé des choses les plus importantes :

1°. D'après les propositions II et III du premier Mémoire, on voit une grande différence entre adjoindre à une équation une des racines d'une équation auxiliaire ou les adjoindre toutes.

Dans les deux cas, le groupe de l'équation se partage par l'adjonction en groupes tels, que l'on passe de l'un à l'autre par une même substitution; mais la condition que ces groupes aient les mêmes substitutions n'a lieu certainement que dans le second cas. Cela s'appelle *la décomposition propre*.

En d'autres termes, quand un groupe G en contient un autre H, le groupe G peut se partager en groupes, que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution; en sorte

* Écrite, on se le rappelle, la veille de la mort de l'auteur. (J. L.

que

$$G = H + HS + HS' + \ldots.$$

Et aussi il peut se décomposer en groupes qui ont tous les mêmes substitutions, en sorte que

$$G = H + TH + T'H + \ldots.$$

Ces deux genres de décompositions ne coïncident pas ordinairement. Quand ils coïncident, la décomposition est dite *propre*.

Il est aisé de voir que, quand le groupe d'une équation n'est susceptible d'aucune décomposition propre, on aura beau transformer cette équation, les groupes des équations transformées auront toujours le même nombre de permutations.

Au contraire, quand le groupe d'une équation est susceptible d'une décomposition propre, en sorte qu'il se partage en M groupes de N permutations, on pourra résoudre l'équation donnée au moyen de deux équations : l'une aura un groupe de M permutations, l'autre un de N permutations.

Lors donc qu'on aura épuisé sur le groupe d'une équation tout ce qu'il y a de décompositions propres possibles sur ce groupe, on arrivera à des groupes qu'on pourra transformer, mais dont les permutations seront toujours en même nombre.

Si ces groupes ont chacun un nombre premier de permutations, l'équation sera soluble par radicaux; sinon, non.

Le plus petit nombre de permutations que puisse avoir un groupe indécomposable, quand ce nombre n'est pas premier, est 5.4.3.

2°. Les décompositions les plus simples sont celles qui ont lieu par la méthode de M. Gauss.

Comme ces décompositions sont évidentes, même dans la forme actuelle du groupe de l'équation, il est inutile de s'arrêter longtemps sur cet objet.

Quelles décompositions sont praticables sur une équation qui ne se simplifie pas par la méthode de M. Gauss?

J'ai appelé *primitives* les équations qui ne peuvent se simplifier par la méthode de M. Gauss; non que ces équations soient réellement indécomposables, puisqu'elles peuvent même se résoudre par radicaux

Comme lemme à la théorie des équations primitives solubles par radicaux, j'ai mis en juin 1830, dans le *Bulletin de Férussac*, une analyse sur les imaginaires de la théorie des nombres.

On trouvera ci-jointe [*] la démonstration des théorèmes suivants :

1°. Pour qu'une équation primitive soit soluble par radicaux, elle doit être du degré p^ν, p étant premier.

2°. Toutes les permutations d'une pareille équation sont de la forme

$$x_{k,\,l,\,m,\,\ldots}\,|\,x_{ak+bl+cm+\ldots+h,\;a'k+b'l+c'm+\ldots+h',\;a''k+\ldots\ldots},$$

k, l, m,... étant ν indices, qui, prenant chacun p valeurs, indiquent toutes les racines. Les indices sont pris suivant le module p; c'est-à-dire que la racine sera la même quand on ajoutera à l'un des indices un multiple de p.

Le groupe qu'on obtient en opérant toutes les substitutions de cette forme linéaire contient, en tout,

$$p^\nu(p^\nu-1)(p^\nu-p)\ldots(p^\nu-p^{\nu-1}) \text{ permutations.}$$

Il s'en faut que dans cette généralité les équations qui lui répondent soient solubles par radicaux.

La condition que j'ai indiquée dans le *Bulletin de Férussac* pour que l'équation soit soluble par radicaux est trop restreinte; il y a peu d'exceptions, mais il y en a.

La dernière application de la théorie des équations est relative aux équations modulaires des fonctions elliptiques.

On sait que le groupe de l'équation qui a pour racines les sinus de l'amplitude des p^2-1 divisions d'une période est celui-ci :

$$x_{k,l} \quad x_{ak+bl\,|\,ck+dl};$$

par conséquent l'équation modulaire correspondante aura pour groupe

$$x_{\frac{k}{l}} \quad x_{\frac{ak+bl}{ck+dl}};$$

dans laquelle $\frac{k}{l}$ peut avoir les $p+1$ valeurs

$$\infty,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ p-1.$$

---

[*] Galois parle des manuscrits, jusqu'ici inédits, que nous publions. (J. L.)

Ainsi, en convenant que k peut être infini, on peut écrire simplement

$$x_k, \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}}.$$

En donnant à a, b, c, d toutes les valeurs, on obtient

$$(p+1)p(p-1) \text{ permutations.}$$

Or ce groupe se décompose *proprement* en deux groupes, dont les substitutions sont

$$x_k, \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}},$$

$ad - bc$ étant un résidu quadratique de p.

Le groupe ainsi simplifié est de

$$(p+1)p\cdot\frac{p-1}{2} \text{ permutations.}$$

Mais il est aisé de voir qu'il n'est plus décomposable proprement, à moins que $p = 2$, ou $p = 3$.

Ainsi, de quelque manière que l'on transforme l'équation, son groupe aura toujours le même nombre de permutations.

Mais il est curieux de savoir si le degré peut s'abaisser.

Et d'abord il ne peut s'abaisser plus bas que p, puisqu'une équation de degré moindre que p ne peut avoir p pour facteur dans le nombre des permutations de son groupe.

Voyons donc si l'équation de degré $p+1$, dont les racines x_k s'indiquent en donnant à k toutes les valeurs, y compris l'infini, et dont le groupe a pour substitutions

$$x_k, \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}},$$

$ad - bc$ étant un carré, peut s'abaisser au degré p.

Or il faut pour cela que le groupe se décompose (improprement, s'entend) en p groupes de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations chacun.

Soient 0 et ∞ deux lettres conjointes dans l'un de ces groupes. Les substitutions qui ne font pas changer 0 et ∞ de place seront de la forme

$$x_k, \quad x_{m^2k}.$$

Donc si M est la lettre conjointe de 1, la lettre conjointe de m^2 sera m^2 M. Quand M est un carré, on aura donc $M^2 = 1$. Mais cette simplification ne peut avoir lieu que pour $p = 5$.

Pour $p = 7$ on trouve un groupe de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations, où

$$\infty \quad 1 \quad 2 \quad 4$$

ont respectivement pour lettres conjointes

$$0 \quad 3 \quad 6 \quad 5.$$

Ce groupe a ses substitutions de la forme

$$x_k, \quad x_{a\frac{k-1}{c}},$$

b étant la lettre conjointe de c, et a une lettre qui est résidu ou non résidu en même temps que c.

Pour $p = 11$, les mêmes substitutions auront lieu avec les mêmes notations,

$$\infty \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 9$$

ayant respectivement pour conjointes

$$0 \quad 2 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 7.$$

Ainsi, pour les cas de $p = 5, 7, 11$, l'équation modulaire s'abaisse au degré p.

En toute rigueur, cette réduction n'est pas possible dans les cas plus élevés.

Le troisième Mémoire concerne les intégrales.

On sait qu'une somme de termes d'une même fonction elliptique se réduit toujours à un seul terme, plus des quantités algébriques ou logarithmiques.

Il n'y a pas d'autres fonctions pour lesquelles cette propriété ait lieu.

Mais des propriétés absolument semblables y suppléent dans toutes les intégrales de fonctions algébriques.

On traite à la fois toutes les intégrales dont la différentielle est une fonction de la variable et d'une même fonction irrationnelle de la variable, que cette irrationnelle soit ou ne soit pas un radical, qu'elle s'exprime ou ne s'exprime pas par des radicaux.

On trouve que le nombre des périodes distinctes de l'intégrale la plus générale relative à une irrationnelle donnée est toujours un nombre pair.

Soit $2n$ ce nombre, on aura le théorème suivant :

Une somme quelconque de termes se réduit à n termes, plus des quantités algébriques et logarithmiques.

Les fonctions de première espèce sont celles pour lesquelles la partie algébrique et logarithmique est nulle.

Il y en a n distinctes.

Les fonctions de seconde espèce sont celles pour lesquelles la partie complémentaire est purement algébrique.

Il y en a n distinctes.

On peut supposer que les différentielles des autres fonctions ne soient jamais infinies qu'une fois pour $x=a$, et, de plus, que leur partie complémentaire se réduise à un seul logarithme, $\log P$, P étant une quantité algébrique. En désignant par $\Pi(x, a)$ ces fonctions, on aura le théorème

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = \Sigma \varphi a \psi x,$$

φa et ψx étant des fonctions de première et de seconde espèce.

On en déduit, en appelant $\Pi(a)$ et ψ les périodes de $\Pi(x, a)$ et ψx relatives à une même révolution de x,

$$\Pi(a) = \Sigma \psi \times \varphi a.$$

Ainsi les périodes des fonctions de troisième espèce s'expriment toujours en fonctions de première et de seconde espèce.

On peut en déduire aussi des théorèmes analogues au théorème de Legendre

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2}.$$

La réduction des fonctions de troisième espèce à des intégrales définies, qui est la plus belle découverte de M. Jacobi, n'est pas praticable, hors le cas des fonctions elliptiques.

La multiplication des fonctions intégrales par un nombre entier est toujours possible, comme l'addition, au moyen d'une équation de

degré n dont les racines sont les valeurs à substituer dans l'intégrale pour avoir les termes réduits.

L'équation qui donne la division des périodes en p parties égales est du degré $p^{2n} - 1$. Son groupe a en tout

$$(p^{2n} - 1)(p^{2n} - p)\ldots(p^{2n} - p^{2n-1}) \text{ permutations.}$$

L'équation qui donne la division d'une somme de n termes en p parties égales est du degré p^{2n}. Elle est soluble par radicaux.

De la transformation. On peut d'abord, en suivant des raisonnements analogues à ceux qu'Abel a consignés dans son dernier Mémoire, démontrer que si, dans une même relation entre des intégrales, on a les deux fonctions

$$\int \Phi(x, X)\,dx, \quad \int \Psi(y, Y)\,dy,$$

la dernière intégrale ayant $2n$ périodes, il sera permis de supposer que y et Y s'expriment moyennant une seule équation de degré n en fonction de x et de X.

D'après cela on peut supposer que les transformations aient lieu constamment entre deux intégrales seulement, puisqu'on aura évidemment, en prenant une fonction quelconque rationnelle de y et de Y,

$$\Sigma \int f(y, Y)\,dy = \int F(x, X)\,dx + \text{une quant. alg. et log.}$$

Il y aurait sur cette équation des réductions évidentes dans le cas où les intégrales de l'un et de l'autre membre n'auraient pas toutes deux le même nombre de périodes.

Ainsi nous n'avons à comparer que des intégrales qui aient toutes deux le même nombre de périodes.

On démontrera que le plus petit degré d'irrationnalité de deux pareilles intégrales ne peut être plus grand pour l'une que pour l'autre.

On fera voir ensuite qu'on peut toujours transformer une intégrale donnée en une autre dans laquelle une période de la première soit divisée par le nombre premier p, et les $2n - 1$ autres restent les mêmes.

Il ne restera donc à comparer que des intégrales où les périodes seront les mêmes de part et d'autre, et telles par conséquent que n termes de l'une s'expriment sans autre équation qu'une seule du degré n, au moyen de ceux de l'autre, et réciproquement. Ici nous ne savons rien.

Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations, depuis quelque temps, étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir à priori, dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes, quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données, sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps, et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain, qui est immense.

Tu feras imprimer cette Lettre dans la *Revue encyclopédique*.

Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr; mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes.

Après cela, il y aura, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.

Je t'embrasse avec effusion.

E. Galois.

Le 29 mai 1832.

Note de M. Liouville.

En insérant dans leur Recueil la Lettre qu'on vient de lire[*], les éditeurs de la *Revue encyclopédique* annonçaient qu'ils publieraient prochainement les manuscrits laissés par Galois. Mais cette promesse

[*] Nous avons déjà dit qu'une Notice nécrologique sur Galois, par M. Auguste Chevalier, a paru dans le même numéro (page 774).

n'a pas été tenue. M. Auguste Chevalier avait cependant préparé le travail. Il nous a remis et on trouvera dans les feuilles qui vont suivre :

1°. Un Mémoire entier sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, avec l'application aux équations de degré premier;

2°. Un fragment d'un second Mémoire où Galois traite de la théorie générale des équations qu'il nomme *primitives*.

Nous avons conservé la plupart des notes que M. Auguste Chevalier avait jointes aux Mémoires dont nous venons de parler. Ces notes sont toutes marquées des initiales A. Ch. Les notes non signées sont de Galois lui-même.

Nous compléterons cette publication par quelques autres morceaux extraits des papiers de Galois, et qui, sans avoir une grande importance, pourront cependant encore être lus avec intérêt par les géomètres.

MÉMOIRE

Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux.

Le Mémoire ci-joint [*] est extrait d'un ouvrage que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie il y a un an. Cet ouvrage n'ayant pas été compris, les propositions qu'il renferme ayant été révoquées en doute, j'ai dû me contenter de donner, sous forme synthétique, les principes généraux, et une *seule* application de ma théorie. Je supplie mes juges de lire du moins avec attention ce peu de pages.

On trouvera ici une *condition* générale à laquelle *satisfait toute équation soluble par radicaux*, et qui réciproquement assure leur résolubilité. On en fait l'application seulement aux équations dont le degré est un nombre premier. Voici le théorème donné par notre analyse :

« Pour qu'une équation de degré premier, qui n'a pas de diviseurs » commensurables, soit soluble par radicaux, il *faut* et il *suffit* que » toutes les racines soient des fonctions rationnelles de deux quelcon- » ques d'entre elles. »

Les autres applications de la théorie sont elles-mêmes autant de théories particulières. Elles nécessitent d'ailleurs l'emploi de la théorie des nombres, et d'un algorithme particulier : nous les réservons pour une autre occasion. Elles sont en partie relatives aux équations modulaires de la théorie des fonctions elliptiques, que nous démontrons ne pouvoir se résoudre par radicaux.

Ce 16 janvier 1831.

E. Galois.

[*] J'ai jugé convenable de placer en tête de ce Mémoire la préface qu'on va lire, bien que je l'aie trouvée biffée dans le manuscrit. A. Ch.

PRINCIPES.

Je commencerai par établir quelques définitions et une suite de lemmes qui sont tous connus.

Définitions. Une équation est dite réductible quand elle admet des diviseurs rationnels; irréductible dans le cas contraire.

Il faut ici expliquer ce qu'on doit entendre par le mot *rationnel*, car il se représentera souvent.

Quand l'équation a *tous* ses coefficients numériques et rationnels, cela veut dire simplement que l'équation peut se décomposer en facteurs qui aient leurs coefficients numériques et rationnels.

Mais quand les coefficients d'une équation ne seront pas *tous* numériques et rationnels, alors il faudra entendre par diviseur rationnel un diviseur dont les coefficients s'exprimeraient en fonction rationnelle des coefficients de la proposée, en général par quantité rationnelle, une quantité qui s'exprime en fonction rationnelle des coefficients de la proposée.

Il y a plus : on pourra convenir de regarder comme rationnelle toute fonction rationnelle d'un certain nombre de quantités déterminées, supposées connues à priori. Par exemple, on pourra choisir une certaine racine d'un nombre entier, et regarder comme rationnelle toute fonction rationnelle de ce radical.

Lorsque nous conviendrons de regarder ainsi comme connues de certaines quantités, nous dirons que nous les *adjoignons* à l'équation qu'il s'agit de résoudre. Nous dirons que ces quantités sont *adjointes* à l'équation.

Cela posé, nous appellerons *rationnelle* toute quantité qui s'exprimera en fonction rationnelle des coefficients de l'équation et d'un certain nombre de quantités *adjointes* à l'équation et convenues arbitrairement.

Quand nous nous servirons d'équations auxiliaires, elles seront rationnelles, si leurs coefficients sont rationnels en notre sens.

On voit, au surplus, que les propriétés et les difficultés d'une équation peuvent être tout à fait différentes suivant les quantités qui lui sont adjointes. Par exemple, l'adjonction d'une quantité peut rendre réductible une équation irréductible.

Ainsi, quand on adjoint à l'équation

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0, \quad \text{où } n \text{ est premier.}$$

une racine d'une des équations auxiliaires de M. Gauss, cette équation se décompose en facteurs, et devient par conséquent réductible.

Les substitutions sont le passage d'une permutation à l'autre.

La permutation d'où l'on part pour indiquer les substitutions est toute arbitraire, quand il s'agit de fonctions; car il n'y a aucune raison pour que, dans une fonction de plusieurs lettres, une lettre occupe un rang plutôt qu'un autre.

Cependant, comme on ne peut guère se former l'idée d'une substitution sans se former celle d'une permutation, nous ferons dans le langage un emploi fréquent des permutations, et nous ne considérerons les substitutions que comme le passage d'une permutation à une autre.

Quand nous voudrons grouper des substitutions, nous les ferons toutes provenir d'une même permutation.

Comme il s'agit toujours de questions où la disposition primitive des lettres n'influe en rien dans les groupes que nous considérerons, on devra avoir les mêmes substitutions, quelle que soit la permutation d'où l'on sera parti. Donc, si dans un pareil groupe on a les substitutions S et T, on est sûr d'avoir la substitution ST.

Telles sont les définitions que nous avons cru devoir rappeler.

Lemme I. « Une équation irréductible ne peut avoir aucune ra-
» cine commune avec une équation rationnelle, sans la diviser. »

Car le plus grand commun diviseur entre l'équation irréductible et l'autre équation, sera encore rationnel; donc, etc.

Lemme II. « Étant donnée une équation quelconque, qui n'a pas
» de racines égales, dont les racines sont a, b, c,..., on peut tou-
» jours former une fonction V des racines, telle qu'aucune des valeurs
» que l'on obtient en permutant dans cette fonction les racines de
» toutes manières, ne soient égales. »

Par exemple, on peut prendre

$$V = Aa + Bb + Cc + \ldots,$$

A, B, C étant des nombres entiers convenablement choisis.

Lemme III. « La fonction V étant choisie comme il est indiqué » dans l'article précédent, elle jouira de cette propriété, que toutes » les racines de l'équation proposée s'exprimeront rationnellement en fonction de V. »

En effet, soit

$$V = \varphi(a, b, c, d, \ldots),$$

ou bien

$$V - \varphi(a, b, c, d, \ldots) = 0.$$

Multiplions entre elles toutes les équations semblables, que l'on obtient en permutant dans celles-ci toutes les lettres, la première seulement restant fixe; il viendra une expression suivante :

$$[V - \varphi(a, b, c, d, \ldots)][V - \varphi(a, c, b, d, \ldots)][V - \varphi(a, b, d, c, \ldots]\ldots,$$

symétrique en $b, c, d, \ldots$, laquelle pourra par conséquent s'écrire en fonction de a. Nous aurons donc une équation de la forme

$$F(V, a) = 0.$$

Or je dis que de là on peut tirer la valeur de a. Il suffit pour cela de chercher la solution commune à cette équation et à la proposée. Cette solution est la seule commune, car on ne peut avoir, par exemple,

$$F(V, b) = 0,$$

cette équation ayant un facteur commun avec l'équation semblable, sans quoi l'une des fonctions $\varphi(a, \ldots)$ serait égale à l'une des fonctions $\varphi(b, \ldots)$; ce qui est contre l'hypothèse.

Il suit de là que a s'exprime en fonction rationnelle de V, et il en est de même des autres racines.

Cette proposition [*] est citée sans démonstration par Abel, dans le Mémoire posthume sur les fonctions elliptiques.

Lemme IV. « Supposons que l'on ait formé l'équation en V, et

---

[*] Il est remarquable, que de cette proposition on peut conclure que toute équation dépend d'une équation auxiliaire telle, que toutes les racines de cette nouvelle

» que l'on ait pris l'un de ses facteurs irréductibles, en sorte que V
» soit racine d'une équation irréductible. Soient V, V′, V″,... les ra-
» cines de cette équation irréductible. Si $a = f(V)$ est une des racines
» de la proposée, $f(V')$ de même sera une racine de la proposée. »

En effet, en multipliant entre eux tous les facteurs de la forme $V - \varphi(a, b, c, \ldots, d)$, où l'on aura opéré sur les lettres toutes les permutations possibles, on aura une équation rationnelle en V, laquelle se trouvera nécessairement divisible par l'équation en question; donc V′ doit s'obtenir par l'échange des lettres dans la fonction V. Soit $F(V, a) = 0$ l'équation qu'on obtient en permutant dans V toutes les lettres, hors la première. On aura donc $F(V', b) = 0$, b pouvant être égal à a, mais étant certainement l'une des racines de l'équation proposée; par conséquent, de même que de la proposée et de $F(V, a) = 0$ est résulté $a = f(V)$, de même il résultera de la proposée et de $F(V', b) = 0$ combinées, la suivante $b = f(V')$.

PROPOSITION I.

Théorème. « Soit une équation donnée, dont $a, b, c, \ldots$ sont les
» m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres
» $a, b, c, \ldots$ qui jouira de la propriété suivante :

» 1°. Que toute fonction des racines, invariable [*] par les substi-
» tutions de ce groupe, soit rationnellement connue ;

» 2°. Réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable
» rationnellement, soit invariable par les substitutions. »

équation soient des fonctions rationnelles les unes des autres; car l'équation auxiliaire en V est dans ce cas.

Au surplus, cette remarque est purement curieuse. En effet, une équation qui a cette propriété n'est pas, en général, plus facile à résoudre qu'une autre.

[*] Nous appelons ici invariable non-seulement une fonction dont la forme est invariable par les substitutions des racines entre elles, mais encore celle dont la valeur numérique ne varierait pas par ces substitutions. Par exemple, si $Fx = 0$ est une équation, Fx est une fonction des racines qui ne varie par aucune permutation.

Quand nous disons qu'une fonction est rationnellement connue, nous voulons dire que sa valeur numérique est exprimable en fonction rationnelle des coefficients de l'équation et des quantités adjointes.

Dans le cas des équations algébriques, ce groupe n'est autre chose que l'ensemble des $1.2.3\ldots m$ permutations possibles sur les m lettres, puisque, dans ce cas, les fonctions symétriques sont seules déterminables rationnellement.

(Dans le cas de l'équation $\frac{x^i-1}{x-1}=0$, si l'on suppose $a=r$, $b=r^g$, $c=r^{g^2}, \ldots$, g étant une racine primitive, le groupe de permutations sera simplement celui-ci :

$$\begin{array}{l} abcd \ldots\ldots\ldots k \\ bcd \ldots\ldots\ldots ka \\ cd \ldots\ldots\ldots kab \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ kabc \ldots\ldots\ldots i; \end{array}$$

dans ce cas particulier, le nombre des permutations est égal au degré de l'équation, et la même chose aurait lieu dans les équations dont toutes les racines seraient des fonctions rationnelles les unes des autres.)

Démonstration. Quelle que soit l'équation donnée, on pourra trouver une fonction rationnelle V des racines, telle que toutes les racines soient fonctions rationnelles de V. Cela posé, considérons l'équation irréductible dont V est racine (lemmes III et IV). Soient V, V′, V″, ..., $V^{(n-1)}$ les racines de cette équation.

Soient φV, $\varphi_1 V$, $\varphi_2 V, \ldots, \varphi_{m-1} V$ les racines de la proposée.

Écrivons les n permutations suivantes des racines

$$\begin{array}{lllll} (V) & \varphi V, & \varphi_1 V, & \varphi_2 V, \ldots & \varphi_{m-1} V, \\ (V') & \varphi V', & \varphi_1 V', & \varphi_2 V' \ldots & \varphi_{m-1} V', \\ (V'') & \varphi V'', & \varphi_1 V'', & \varphi_2 V'' \ldots & \varphi_{m-1} V'', \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (V^{n-1}) & \varphi V^{(n-1)}, & \varphi_1 V^{(n-1)}, & \varphi_2 V^{(n-1)} \ldots & \varphi_{m-1} V^{(n-1)}; \end{array}$$

je dis que ce groupe de permutations jouit de la propriété énoncée.

En effet, 1° toute fonction F des racines, invariable par les substitutions de ce groupe, pourra être écrite ainsi : $F = \psi V$, et l'on aura

$$\psi V = \psi V' = \psi V'' = \ldots = \psi V^{(n-1)}.$$

La valeur de F pourra donc se déterminer rationnellement.

2°. *Réciproquement.* Si une fonction F est déterminable rationnellement, et que l'on pose $F = \psi V$, on devra avoir

$$\psi V = \psi V' = \psi V'' = \ldots = \psi V^{(p-1)},$$

puisque l'équation en V n'a pas de diviseur commensurable et que V satisfait à l'équation $F = \psi V$, F étant une quantité rationnelle. Donc la fonction F sera nécessairement invariable par les substitutions du groupe écrit ci-dessus.

Ainsi, ce groupe jouit de la double propriété dont il s'agit dans le théorème proposé. Le théorème est donc démontré.

Nous appellerons groupe de l'équation le groupe en question.

Scolie 1. Il est évident que dans le groupe de permutations dont il s'agit ici, la disposition des lettres n'est point à considérer, mais seulement les substitutions de lettres par lesquelles on passe d'une permutation à l'autre.

Ainsi l'on peut se donner arbitrairement une première permutation, pourvu que les autres permutations s'en déduisent toujours par les mêmes substitutions de lettres. Le nouveau groupe ainsi formé jouira évidemment des mêmes propriétés que le premier, puisque dans le théorème précédent, il ne s'agit que des substitutions que l'on peut faire dans les fonctions.

Scolie 2. Les substitutions sont indépendantes même du nombre des racines.

PROPOSITION II.

Théorème [*]. « Si l'on adjoint à une équation donnée la racine r

[*] Dans l'énoncé du théorème, après ces mots : « la racine r d'une équation auxiliaire irréductible, » Galois avait mis d'abord ceux-ci : « de degré p premier, » qu'il a effacés plus tard. De même, dans la démonstration, au lieu de « $r, r', r'', \ldots$ étant d'autres valeurs de r, » la rédaction primitive portait : « $r, r', r'', \ldots$ étant les diverses valeurs de r. » Enfin on trouve à la marge du manuscrit la note suivante de l'auteur :

« Il y a quelque chose à compléter dans cette démonstration. Je n'ai pas le temps. »

Cette ligne a été jetée avec une grande rapidité sur le papier ; circonstance qui, jointe aux mots : « Je n'ai pas le temps », me fait penser que Galois a relu son Mémoire pour le corriger avant d'aller sur le terrain. A. Ch.

» d'une équation auxiliaire irréductible, 1° il arrivera de deux choses l'une : ou bien le groupe de l'équation ne sera pas changé, ou bien » il se partagera en p groupes appartenant chacun à l'équation pro- » posée respectivement quand on lui adjoint chacune des racines de » l'équation auxiliaire; 2° ces groupes jouiront de la propriété re- » marquable, que l'on passera de l'un à l'autre en opérant dans toutes » les permutations du premier une même substitution de lettres. »

1°. Si, après l'adjonction de r, l'équation en V, dont il est question plus haut, reste irréductible, il est clair que le groupe de l'équation ne sera pas changé. Si, au contraire, elle se réduit, alors l'équation en V se décomposera en p facteurs, tous de même degré et de la forme

$$f(V, r) \times f(V, r') \times f(V, r'') \times \ldots,$$

r, r', r'', ... étant d'autres valeurs de r. Ainsi le groupe de l'équation proposée se décomposera aussi en groupes chacun d'un même nombre de permutations, puisqu'à chaque valeur de V correspond une permutation. Ces groupes seront respectivement ceux de l'équation proposée, quand on lui adjoindra successivement r, r', r'', ...

2°. Nous avons vu plus haut que toutes les valeurs de V étaient des fonctions rationnelles les unes des autres. D'après cela, supposons que V étant une racine de $f(V, r) = 0$, $F(V)$ en soit une autre; il est clair que de même si V′ est une racine de $f(V, r') = 0$, $F(V')$ en sera une autre; car l'on aura

$$f[F(V), r] = \text{une fonction divisible par } f(V, r).$$

Donc (*lemme* 1)

$$f[F(V'), r'] = \text{une fonction divisible par } f(V', r').$$

Cela posé, je dis que l'on obtient le groupe relatif à r' en opérant partout dans le groupe relatif à r une même substitution de lettres.

En effet, si l'on a, par exemple,

$$\varphi_a F(V) = \varphi_b(V),$$

on aura encore (*lemme* 1)

$$\varphi_a F(V') = \varphi_b(V').$$

Donc, pour passer de la permutation $[F(V)]$ à la permutation $[F(V')]$, il faut faire la même substitution que pour passer de la permutation (V) à la permutation (V').

Le théorème est donc démontré.

PROPOSITION III.

Théorème. « Si l'on adjoint à une équation *toutes* les racines d'une » équation auxiliaire, les groupes dont il est question dans le théo- » rème II jouiront de plus de cette propriété, que les substitutions sont » les mêmes dans chaque groupe. »

On trouvera la démonstration [*].

PROPOSITION IV.

Théorème. « Si l'on adjoint à une équation la valeur *numérique* » d'une certaine fonction de ses racines, le groupe de l'équation » s'abaissera de manière à n'avoir plus d'autres permutations que » celles par lesquelles cette fonction est invariable. »

En effet, d'après la proposition I, toute fonction connue doit être invariable par les permutations du groupe de l'équation.

---

[*] Dans le manuscrit, l'énoncé du théorème qu'on vient de lire se trouve en marge et en remplace un autre que Galois avait écrit avec sa démonstration sous le même titre : *Proposition III*. Voici le texte primitif : Théorème. « Si l'équation en r est de la forme » $r^p = A$, et que les racines $p^{ièmes}$ de l'unité se trouvent au nombre des quantités préce- » demment adjointes, les p groupes dont il est question dans le théorème II jouiront » de plus de cette propriété, que les substitutions de lettres par lesquelles on passe » d'une permutation à une autre dans chaque groupe soient les mêmes pour tous les » groupes. » En effet, dans ce cas, il revient au même d'adjoindre à l'équation telle ou telle valeur de r. Par conséquent, ses propriétés doivent être les mêmes après l'adjonction de telle ou telle valeur. Ainsi son groupe doit être le même quant aux substitutions (Proposition I, scolie). Donc, etc.

Tout cela est effacé avec soin; le nouvel énoncé porte la date 1832, et montre, par la manière dont il est écrit, que l'auteur était extrêmement pressé, ce qui confirme l'assertion que j'ai avancée dans la note précédente. A. Ch.

PROPOSITION V.

Problème. « Dans quels cas une équation est-elle soluble par de » simples radicaux? »

J'observerai d'abord que, pour résoudre une équation, il faut successivement abaisser son groupe jusqu'à ne contenir plus qu'une seule permutation. Car, quand une équation est résolue, une fonction quelconque de ses racines est connue, même quand elle n'est invariable par aucune permutation.

Cela posé, cherchons à quelle condition doit satisfaire le groupe d'une équation, pour qu'il puisse s'abaisser ainsi par l'adjonction de quantités radicales.

Suivons la marche des opérations possibles dans cette solution, en considérant comme opérations distinctes l'extraction de chaque racine de degré premier.

Adjoignons à l'équation le premier radical extrait dans la solution. Il pourra arriver deux cas : ou bien, par l'adjonction de ce radical, le groupe des permutations de l'équation sera diminué; ou bien, cette extraction de racine n'étant qu'une simple préparation, le groupe restera le même.

Toujours sera-t-il qu'après un certain nombre *fini* d'extractions de racines, le groupe devra se trouver diminué, sans quoi l'équation ne serait pas soluble.

Si, arrivé à ce point, il y avait plusieurs manières de diminuer le groupe de l'équation proposée par une simple extraction de racine, il faudrait, pour ce que nous allons dire, considérer seulement un radical du degré le moins haut possible parmi tous les simples radicaux, qui sont tels que la connaissance de chacun d'eux diminue le groupe de l'équation.

Soit donc p le nombre premier qui représente ce degré minimum, en sorte que par une extraction de racine de degré p, on diminue le groupe de l'équation.

Nous pouvons toujours supposer, du moins pour ce qui est relatif au groupe de l'équation, que parmi les quantités adjointes précédemment à l'équation se trouve une racine $p^{ième}$ de l'unité, α. Car, comme

cette expression s'obtient par des extractions de racines de degré inférieur à p. sa connaissance n'altérera en rien le groupe de l'équation.

Par conséquent, d'après les théorèmes II et III, le groupe de l'équation devra se décomposer en p groupes jouissant les uns par rapport aux autres de cette double propriété : 1° Que l'on passe de l'un à l'autre par une seule et même substitution; 2° que tous contiennent les mêmes substitutions.

Je dis réciproquement, que si le groupe de l'équation peut se partager en p groupes qui jouissent de cette double propriété, on pourra, par une simple extraction de racine $p^{ième}$, et par l'adjonction de cette racine $p^{ième}$, réduire le groupe de l'équation à l'un de ces groupes partiels.

Prenons, en effet, une fonction des racines qui soit invariable pour toutes les substitutions de l'un des groupes partiels, et varie pour toute autre substitution. (Il suffit, pour cela, de choisir une fonction symétrique des diverses valeurs que prend, par toutes les permutations de l'un des groupes partiels, une fonction qui n'est invariable pour aucune substitution.)

Soit θ cette fonction des racines.

Opérons sur la fonction θ une des substitutions du groupe total qui ne lui sont pas communes avec les groupes partiels. Soit θ_1 le résultat. Opérons sur la fonction θ_1 la même substitution, et soit θ_2 le résultat, et ainsi de suite.

Comme p est un nombre premier, cette suite ne pourra s'arrêter qu'au terme θ_{p-1}, ensuite l'on aura $\theta_p = \theta_1$, $\theta_{p+1} = \theta_1$, et ainsi de suite.

Cela posé, il est clair que la fonction

$$(\theta + \alpha\theta_1 + \alpha^2\theta_2 - \ldots + \alpha^{p-1}\theta_{p-1})^p$$

sera invariable par toutes les permutations du groupe total, et, par conséquent, sera actuellement connue.

Si l'on extrait la racine $p^{ième}$ de cette fonction, et qu'on l'adjoigne à l'équation, alors, par la proposition IV, le groupe de l'équation ne contiendra plus d'autres substitutions que celles des groupes partiels.

Ainsi, pour que le groupe d'une équation puisse s'abaisser par une simple extraction de racine, la condition ci-dessus est nécessaire et suffisante.

Adjoignons à l'équation le radical en question; nous pourrons raisonner maintenant sur le nouveau groupe comme sur le précédent, et il faudra qu'il se décompose lui-même de la manière indiquée, et ainsi de suite, jusqu'à un certain groupe qui ne contiendra plus qu'une seule permutation.

Scolie. Il est aisé d'observer cette marche dans la résolution connue des équations générales du quatrième degré. En effet, ces équations se résolvent au moyen d'une équation du troisième degré, qui exige elle-même l'extraction d'une racine carrée. Dans la suite naturelle des idées, c'est donc par cette racine carrée qu'il faut commencer. Or, en adjoignant à l'équation du quatrième degré cette racine carrée, le groupe de l'équation, qui contenait en tout vingt-quatre substitutions, se décompose en deux qui n'en contiennent que douze. En désignant par a, b, c, d les racines, voici l'un de ces groupes :

$$\begin{array}{lll} abcd, & acdb, & adbc, \\ badc, & cabd, & dacb, \\ cdab, & dbac, & bcad, \\ dcba, & bdca, & cbda. \end{array}$$

Maintenant ce groupe se partage lui-même en trois groupes, comme il est indiqué aux théorèmes II et III. Ainsi, par l'extraction d'un seul radical du troisième degré, il reste simplement le groupe

$$\begin{array}{l} abcd, \\ badc, \\ cdab, \\ dcba; \end{array}$$

ce groupe se partage de nouveau en deux groupes :

$$\begin{array}{ll} abcd, & cdab, \\ badc, & dcba. \end{array}$$

Ainsi, après une simple extraction de racine carrée, il restera

$$\begin{array}{l} abcd, \\ badc; \end{array}$$

ce qui se résoudra enfin par une simple extraction de racine carrée.

On obtient ainsi, soit la solution de Descartes, soit celle d'Euler; car, bien qu'après la résolution de l'équation auxiliaire du troisième degré, ce dernier extraye trois racines carrées, on sait qu'il suffit de deux, puisque la troisième s'en déduit rationnellement.

Nous allons maintenant appliquer cette condition aux équations irréductibles dont le degré est premier.

Application aux équations irréductibles de degré premier.

PROPOSITION VI.

Lemme. « Une équation irréductible de degré premier ne peut de-
» venir réductible par l'adjonction d'un radical dont l'indice serait autre
» que le degré même de l'équation. »

Car si $r, r', r'', \ldots$ sont les diverses valeurs du radical, et $Fx = 0$ l'équation proposée, il faudrait que Fx se partageât en facteurs

$$f(x, r) \times f(x, r') \times \ldots,$$

tous de même degré, ce qui ne se peut, à moins que $f(x, r)$ ne soit du premier degré en x.

Ainsi une équation irréductible de degré premier ne peut devenir réductible, à moins que son groupe ne se réduise à une seule permutation.

PROPOSITION VII.

Problème. « Quel est le groupe d'une équation irréductible d'un
» degré premier n, soluble par radicaux? »

D'après la proposition précédente, le plus petit groupe possible avant celui qui n'a qu'une seule permutation, contiendra n permutations. Or un groupe de permutations d'un nombre premier n de lettres ne peut se réduire à n permutations, à moins que l'une de ces permutations ne se déduise de l'autre par une substitution circulaire de l'ordre n. (Voir le Mémoire de M. Cauchy, *Journal de l'École Polytech-*

nique, XVIIe cahier.) Ainsi l'avant-dernier groupe sera

$$(G)\quad \left\{\begin{array}{llllllll} x_0, & x_1, & x_2, & x_3, \ldots, & x_{n-3}, & x_{n-2}, & x_{n-1}, \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \ldots, & x_{n-2}, & x_{n-1}, & x_0, \\ x_2, & x_3, \ldots\ldots\ldots, & & & x_{n-1}, & x_0, & x_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-1}, & x_0, & x_1, \ldots\ldots, & & x_{n-4}, & x_{n-3}, & x_{n-2}, \end{array}\right.$$

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ étant les racines.

Maintenant, le groupe qui précédera immédiatement celui-ci dans l'ordre des décompositions devra se composer d'un certain nombre de groupes ayant tous les mêmes substitutions que celui-ci. Or j'observe que ces substitutions peuvent s'exprimer ainsi : (Faisons en général $x_n = x_0$, $x_{n+1} = x_1, \ldots$, il est clair que chacune des substitutions du groupe (G) s'obtient en mettant partout à la place de x_k, x_{k+c}, c étant une constante.)

Considérons l'un quelconque des groupes semblables au groupe (G). D'après le théorème II, il devra s'obtenir en opérant partout dans ce groupe une même substitution; par exemple, en mettant partout dans le groupe (G), à la place de x_k, $x_{f(k)}$, f étant une certaine fonction.

Les substitutions de ces nouveaux groupes devant être les mêmes que celles du groupe (G), on devra avoir

$$f(k+c) = f(k) + C,$$

C étant indépendant de k.

Donc

$$f(k+2c) = f(k) + 2C,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(k+mc) = f(k) + mC.$$

Si $c = 1$, $k = 0$, on trouvera

$$f(m) = am + b.$$

ou bien

$$f(k) = ak + b.$$

a et b étant des constantes.

Donc le groupe qui précède immédiatement le groupe G ne devra contenir que des substitutions telles que

$$x_k, \quad x_{ak-b},$$

et ne contiendra pas, par conséquent, d'autre substitution circulaire que celle du groupe (G).

On raisonnera sur ce groupe comme sur le précédent, et il s'ensuivra que le premier groupe dans l'ordre des décompositions, c'est-à-dire le groupe *actuel* de l'équation, ne peut contenir que des substitutions de la forme

$$x_k, \quad x_{ak-b}.$$

Donc, « si une équation irréductible de degré premier est soluble par radicaux, le groupe de cette équation ne saurait contenir que des substitutions de la forme

$$x_k, \quad x_{ak-b},$$

a et b étant des constantes. »

Réciproquement, si cette condition a lieu, je dis que l'équation sera soluble par radicaux. Considérons, en effet, les fonctions

$$\begin{aligned}
&(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} x_{n-1})^n = X_1,\\
&(x_0 + \alpha x_a + \alpha^2 x_{2a} + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} x_{(n-1)a})^n = X_a,\\
&(x_0 + \alpha x_{a^2} + \alpha^2 x_{2a^2} + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} x_{(n-1)a^2})^n = X_{a^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

α étant une racine $n^{ième}$ de l'unité, a une racine primitive de n.

Il est clair que toute fonction invariable par les substitutions circulaires des quantités X_1, X_a, X_{a^2}, ... sera, dans ce cas, immédiatement connue. Donc on pourra trouver X_1, X_a, X_{a^2}, ..., par la méthode de M. Gauss pour les équations binômes. Donc, etc.

Ainsi, pour qu'une équation irréductible de degré premier soit soluble par radicaux, il *faut* et il *suffit* que toute fonction invariable par les substitutions

$$x_k, \quad x_{ak-b}$$

soit rationnellement connue.

Ainsi la fonction

$$(X_1 - X)(X_a - X)(X_{a^2} - X)\ldots$$

devra, quel que soit X, être connue.

Il *faut* donc et il *suffit* que l'équation qui donne cette fonction des racines admette, quel que soit X, une valeur rationnelle.

Si l'équation proposée a tous ses coefficients rationnels, l'équation auxiliaire qui donne cette fonction les aura tous aussi, et il suffira de reconnaître si cette équation auxiliaire du degré $1.2.3\ldots(n-2)$ a ou non une racine rationnelle, ce que l'on sait faire.

C'est là le moyen qu'il faudrait employer dans la pratique. Mais nous allons présenter le théorème sous une autre forme.

PROPOSITION VIII.

Théorème. « Pour qu'une équation irréductible de degré premier » soit soluble par radicaux, il *faut* et il *suffit* que deux quelconques » des racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnelle- » ment. »

Premièrement, il le faut, car la substitution

$$x_k, \quad x_{ak+b}$$

ne laissant jamais deux lettres à la même place, il est clair qu'en adjoignant deux racines à l'équation, par la proposition IV, son groupe devra se réduire à une seule permutation.

En second lieu, cela suffit; car, dans ce cas, aucune substitution du groupe ne laissera deux lettres aux mêmes places. Par conséquent, le groupe contiendra tout au plus $n(n-1)$ permutations. Donc il ne contiendra qu'une seule substitution circulaire (sans quoi il y aurait au moins n^2 permutations). Donc toute substitution du groupe, x_k, x_{fk}, devra satisfaire à la condition

$$f(k+c) = fk + c.$$

Donc, etc.

Le théorème est donc démontré.

Exemple du théorème VII.

Soit $n = 5$; le groupe sera le suivant :

abcde
bcdea
cdeab
deabc
eabcd

---

acebd
cebda
ebdac
bdace
daceb

---

aedcb
edcba
dcbae
cbaed
baedc

---

adbec
dbeca
becad
ecadb
cadbe.

Fragment d'un second Mémoire.

Des équations primitives qui sont solubles par radicaux.

Cherchons, en général, dans quel cas une équation primitive est soluble par radicaux. Or nous pouvons de suite établir un caractère général fondé sur le degré même de ces équations. Ce caractère est celui-ci : pour qu'une équation primitive soit résoluble par radicaux, il faut que son degré soit de la forme p^ν, p étant premier. Et de là suivra immédiatement que, lorsqu'on aura à résoudre par radicaux une équation irréductible dont le degré admettrait des facteurs premiers inégaux, on ne pourra le faire que par la méthode de décomposition due à M. Gauss; sinon l'équation sera insoluble.

Pour établir la propriété générale que nous venons d'énoncer relativement aux équations primitives qu'on peut résoudre par radicaux, nous pouvons supposer que l'équation que l'on veut résoudre soit primitive, mais cesse de l'être par l'adjonction d'un simple radical. En d'autres termes, nous pouvons supposer que, n étant premier, le groupe de l'équation se partage en n groupes irréductibles conjugués, mais non primitifs. Car, à moins que le degré de l'équation soit premier, un pareil groupe se présentera toujours dans la suite des décompositions.

Soit N le degré de l'équation, et supposons qu'après une extraction de racine de degré premier n, elle devienne non primitive et se partage en Q équations primitives de degré P, au moyen d'une seule équation de degré Q.

Si nous appelons G le groupe de l'équation, ce groupe devra se partager en n groupes conjugués non primitifs, dans lesquels les lettres se rangeront en systèmes composés de P lettres conjointes chacun. Voyons de combien de manières cela pourra se faire.

Soit H l'un des groupes conjugués non primitifs. Il est aisé de voir que, dans ce groupe, deux lettres quelconques prises à volonté feront partie d'un certain système de P lettres conjointes, et ne feront partie que d'un seul.

Car, en premier lieu, s'il y avait deux lettres qui ne pussent faire partie d'un même système de P lettres conjointes, le groupe G, qui est tel que l'une quelconque de ses substitutions transforme les unes dans les autres toutes les substitutions du groupe H, serait non primitif : ce qui est contre l'hypothèse.

En second lieu, si deux lettres faisaient partie de plusieurs systèmes différents, il s'ensuivrait que les groupes qui répondent aux divers systèmes de P lettres conjointes ne seraient pas primitifs : ce qui est encore contre l'hypothèse.

Cela posé, soient

$$\begin{array}{llll} a_0, & a_1, & a_2, \ldots, & a_{P-1}, \\ b_0, & b_1, & b_2, \ldots, & b_{P-1}, \\ c_0, & c_1, & c_2, \ldots, & c_{P-1}, \end{array}$$

les N lettres : supposons que chaque ligne horizontale représente un système de lettres conjointes. Soient

$$a_0, \quad a_{0,1}, \quad a_{0,2}, \ldots, \quad a_{0,P-1},$$

P lettres conjointes toutes situées dans la première colonne verticale. (Il est clair que nous pouvons faire qu'il en soit ainsi, en intervertissant l'ordre des lignes horizontales.)

Soient, de même,

$$a_{1,0}, \quad a_{1,1}, \quad a_{1,2}, \quad a_{1,3}, \ldots, \quad a_{1,P-1},$$

P lettres conjointes toutes situées dans la seconde colonne verticale, en sorte que

$$a_{1,0}, \quad a_{1,1}, \quad a_{1,2}, \quad a_{1,3}, \ldots, \quad a_{1,P-1}$$

appartiennent respectivement aux mêmes lignes horizontales que

$$a_{0,0}, \quad a_{0,1}, \quad a_{0,2}, \quad a_{0,3}, \ldots, \quad a_{0,P-1};$$

soient, de même, les systèmes de lettres conjointes

$$a_{2.0},\quad a_{2.1},\quad a_{2.2},\quad a_{2.3},\ldots,\quad a_{2.P-1},$$
$$a_{3.0},\quad a_{3.1},\quad a_{3.2},\quad a_{3.3},\ldots,\quad a_{3.P-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nous obtiendrons ainsi, en tout, P^2 lettres. Si le nombre total des lettres n'est pas épuisé, on prendra un troisième indice, en sorte que

$$a_{m.n.0},\quad a_{m.n.1},\quad a_{m.n.2},\quad a_{m.n.3},\ldots,\quad a_{m.n.P-1}$$

soit, en général, un système de lettres conjointes; et l'on parviendra ainsi à cette conclusion, que $N = P^{\mu}$, μ étant un certain nombre égal à celui des indices différents dont on aura besoin. La forme générale des lettres sera

$$a_{k_1.k_2.k_3\ldots k_\mu}.$$

$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\mu$ étant des indices qui peuvent prendre chacun les P valeurs 0, 1, 2, 3, ..., P − 1.

On voit aussi, par la maniere dont nous avons procédé, que dans le groupe H, toutes les substitutions seront de la forme

$$\left[a_{k_1.k_2.k_3\ldots k_\mu}\quad a_{\varphi_1(k_1).\varphi_2(k_2).\varphi_3(k_3)\ldots\varphi_\mu(k_\mu)}\right],$$

puisque chaque indice correspond à un système de lettres conjointes.

Si P n'est pas un nombre premier, on raisonnera sur le groupe de permutations de l'un quelconque des systèmes de lettres conjointes, comme sur le groupe G, en remplaçant chaque indice par un certain nombre de nouveaux indices, et l'on trouvera $P = R^{\alpha}$, et ainsi de suite; d'où enfin $N = p^{\nu}$, p étant un nombre premier.

Des équations primitives de degré p^2.

Arrêtons-nous un moment pour traiter de suite les équations primitives d'un degré p^2, p étant premier impair. (Le cas de $p = 2$ a été examiné.) Si une équation du degré p^2 est soluble par radicaux, suppo-

sons-la d'abord telle, qu'elle devienne non primitive par une extraction de radical.

Soit donc G un groupe primitif de p^2 lettres qui se partage en n groupes non primitifs conjugués à H.

Les lettres devront nécessairement, dans le groupe H, se ranger ainsi,

$$\begin{array}{lllll}
a_{0.0}, & a_{0.1}, & a_{0.2}, & a_{0.3}, \ldots, & a_{0.p-1}, \\
a_{1.0}, & a_{1.1}, & a_{1.2}, & a_{1.3}, \ldots, & a_{1.p-1}, \\
a_{2.0}, & a_{2.1}, & a_{2.2}, & a_{2.3}, \ldots, & a_{2.p-1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{p-1.0}, & a_{p-1.1}, & a_{p-1.2}, & a_{p-1.3}, \ldots, & a_{p-1.p-1},
\end{array}$$

chaque ligne horizontale et chaque ligne verticale étant un système de lettres conjointes.

Si l'on permute entre elles les lignes horizontales, le groupe que l'on obtiendra, étant primitif et de degré premier, ne devra contenir que des substitutions de la forme

$$\left(a_{\substack{k.k\\1\ 2}}, \quad a_{\substack{mk+n.k\\1\ \ \ 2}}\right),$$

les indices étant pris relativement au module p.

Il en sera de même pour les lignes verticales qui ne pourront donner que des substitutions de la forme

$$\left(a_{\substack{k.k\\1\ 2}}, \quad a_{\substack{k.qk+r\\1\ \ \ 2}}\right).$$

Donc enfin toutes les substitutions du groupe H seront de la forme

$$\left(a_{\substack{k.k\\1\ 2}}, \quad a_{\substack{m'k+n\ m'k+n\\1\ 1\ \ \ 1\ 2\ 2\ \ 2}}\right).$$

Si un groupe G se partage en n groupes conjugués à celui que nous venons de décrire, toutes les substitutions du groupe G devront transformer les unes dans les autres les substitutions circulaires du groupe H, qui sont toutes écrites comme il suit :

$$a) \qquad \left(a_{\substack{k.k\\1\ 2}}, \ldots, \quad a_{\substack{k+\alpha\ k+\alpha\\1\ \ \ 1\ 2\ \ 2}}, \ldots\right).$$

Supposons donc que l'une des substitutions du groupe G se forme en remplaçant respectivement

$$\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \quad \text{par} \quad \begin{matrix} \varphi_1(k_1, k_2) \\ \varphi_2(k_1, k_2) \end{matrix}.$$

Si, dans les fonctions φ_1, φ_2, on substitue pour k_1 et k_2 les valeurs $k_1 - \alpha_1$, $k_2 - \alpha_2$, il devra venir des résultats de la forme

$$\varphi_1 - \delta_1, \quad \varphi_2 + \delta_2,$$

et de là il est aisé de conclure immédiatement que les substitutions du groupe G doivent être toutes comprises dans la formule

$$(A) \qquad \left(a_{k_1, k_2}, \quad a_{mk_1 + nk_2 + \alpha_1, mk_1 + nk_2 + \alpha_2}\right).$$

Or nous savons, par le n° [*], que les substitutions du groupe G ne peuvent embrasser que $p^2 - 1$ ou $p^2 - p$ lettres. Ce n'est point $p^2 - p$, puisque, dans ce cas, le groupe G serait non primitif. Si donc dans le groupe G on ne considère que les permutations où la lettre $a_{0,0}$, par exemple, conserve toujours la même place, on n'aura que des substitutions de l'ordre $p^2 - 1$ entre les $p^2 - 1$ autres lettres.

Mais rappelons-nous ici que c'est simplement pour la démonstration, que nous avons supposé que le groupe primitif G se partageât en groupes conjugués non primitifs. Comme cette condition n'est nullement nécessaire, les groupes seront souvent beaucoup plus composés.

Il s'agit donc de reconnaître dans quel cas ces groupes pourront admettre des substitutions où $p^2 - p$ lettres seulement varieraient, et cette recherche va nous retenir quelque temps.

Soit donc G un groupe qui contienne quelque substitution de l'ordre $p^2 - p$; je dis d'abord que toutes les substitutions de ce groupe seront linéaires, c'est-à-dire de la forme (A).

---

[*] Ce Mémoire faisant suite à un travail de Galois que je ne possède pas, il m'est impossible d'indiquer le Mémoire cité ici et plus bas. A. Ch.

La chose est reconnue vraie pour les substitutions de l'ordre $p^2 - 1$; il suffit donc de la démontrer pour celles de l'ordre $p^2 - p$. Ne considérons donc qu'un groupe où les substitutions seraient toutes m de l'ordre p^2 ou de l'ordre $p^2 - p$. (*Voyez* l'endroit cité.)

Alors les p lettres qui, dans une substitution de l'ordre $p^2 - p$, ne varieront pas, devront être des lettres conjointes.

Supposons que ces lettres conjointes soient

$$a_{0,0},\quad a_{0,1},\quad a_{0,2},\ldots,\quad a_{0,p-1}.$$

Nous pouvons déduire toutes les substitutions où ces p lettres ne changent pas de place, nous pouvons les déduire de substitutions de la forme

$$\left(a_{\underset{1}{k},\underset{2}{k}},\quad a_{\underset{1}{i},\underset{2}{i+r}}\right).$$

et de substitutions de l'ordre $p^2 - p$, dont la période serait de p termes (*Voyez* encore l'endroit cité.)

Les premiers doivent nécessairement, pour que le groupe jouisse de la propriété voulue, se réduire à la forme

$$\left(a_{\underset{1}{k},\underset{2}{k}},\quad a_{\underset{1}{k},\underset{2}{mk}}\right).$$

d'après ce qu'on a vu pour les équations de degré p.

Quant aux substitutions dont la période serait de p termes, comme elles sont conjuguées aux précédentes, nous pouvons supposer un groupe qui les contienne sans contenir celles-ci : donc elles devront transformer les substitutions circulaires (a) les unes dans les autres; donc elles seront aussi linéaires.

Nous sommes donc arrivés à cette conclusion, que le groupe primitif de permutations de p^2 lettres doit ne contenir que des substitutions de la forme (A).

Maintenant, prenons le groupe total que l'on obtient en opérant sur l'expression

$$a_{\underset{1}{k},\underset{2}{k}}$$

toutes les substitutions linéaires possibles, et cherchons quels sont les

diviseurs de ce groupe qui peuvent jouir de la propriété voulue pour la résolubilité des équations.

Quel est d'abord le nombre total des substitutions linéaires? Premièrement, il est clair que toute transformation de la forme

$$k_1 k_2 \quad mk_1 + nk_2 + \alpha_1 . mk_2 + nk_2 + \alpha_2$$

ne sera pas pour cela une substitution; car il faut, dans une substitution, qu'à chaque lettre de la première permutation il ne réponde qu'une seule lettre de la seconde, et réciproquement.

Si donc on prend une lettre quelconque $a_{l_1 l_2}$ de la seconde permutation, et que l'on remonte à la lettre correspondante dans la première, on devra trouver une lettre $a_{k_1 k_2}$ où les indices $k_1 . k_2$ seront parfaitement déterminés. Il faut donc que, quels que soient l_1 et l_2, on ait par les deux équations

$$m_1 k_1 + nk_2 + \alpha_1 = l_1, \quad mk_2 + nk_2 + \alpha_2 = l_2,$$

des valeurs de k_1 et k_2 finies et déterminées. Ainsi la condition pour qu'une pareille transformation soit réellement une substitution, est que $mn_{12} - mn_{21}$ ne soit ni nul ni divisible par le module p, ce qui est la même chose.

Je dis maintenant que, bien que ce groupe à substitutions linéaires n'appartienne pas toujours, comme on le verra, à des équations solubles par radicaux, il jouira toutefois de cette propriété, que si dans une quelconque de ses substitutions il y a n lettres de fixes, n divisera le nombre des lettres. Et, en effet, quel que soit le nombre des lettres qui restent fixes, on pourra exprimer cette circonstance par des équations linéaires qui donneront tous les indices de l'une des lettres fixes, au moyen d'un certain nombre d'entre eux. Donnant à chacun de ces indices, restés arbitraires, p valeurs, on aura p^m systèmes de valeurs, m étant un certain nombre. Dans le cas qui nous occupe, m est nécessairement < 2, et se trouve par conséquent être 0 ou 1. Donc

le nombre des substitutions ne saurait être plus grand que

$$p^2(p^2-1)(p^2-p).$$

Ne considérons maintenant que les substitutions linéaires où la lettre $a_{0.0}$ ne varie pas; si, dans ce cas, nous trouvons le nombre total des permutations du groupe qui contient toutes les substitutions linéaires possibles, il nous suffira de multiplier ce nombre par p^2.

Or, premièrement, en substituant p à l'indice k_2, toutes les substitutions de la forme

$$\left(a_{\underset{1}{k}.\underset{2}{k}},\quad a_{\underset{1}{mk}.\underset{2}{k}}\right)$$

donneront en tout $p-1$ substitutions. On en aura p^2-p en ajoutant au terme k_2 le terme $\underset{2}{mk}$, ainsi qu'il suit :

$$(m') \qquad \left(\underset{1}{k}.\underset{2}{k},\quad \underset{1}{mk}.\underset{2}{mk}+\underset{2}{k}\right).$$

D'un autre côté, il est aisé de trouver un groupe linéaire de p^2-1 permutations, tel que, dans chacune de ses substitutions, toutes les lettres, à l'exception de $a_{0.0}$, varient. Car, en remplaçant le double indice $\underset{1}{k}\underset{2}{k}$ par l'indice simple k_1+ik_2, i étant une racine primitive de

$$x^{p^2-1}-1=0 \qquad \text{mod. } p,$$

il est clair que toute substitution de la forme

$$\left[a_{\underset{1}{k}+\underset{2}{k}},\quad a_{(\underset{2}{m}+\underset{1}{m})(\underset{1}{k}+\underset{2}{k})}\right]$$

sera une substitution linéaire; mais, dans ces substitutions, aucune lettre ne reste à la même place, et elles sont au nombre de p^2-1.

Nous avons donc un système de p^2-1 permutations tel que, dans chacune de ses substitutions, toutes les lettres varient, à l'exception de $a_{0.0}$. Combinant ces substitutions avec les p^2-p dont il est parlé plus haut, nous aurons

$$(p^2-1)(p^2-p) \text{ substitutions.}$$

Or, nous avons vu à priori que le nombre des substitutions où $a_{0.0}$

reste fixe ne pouvait être plus grand que $(p^2-1)(p^2-p)$. Donc il est précisément égal à $(p^2-1)(p^2-p)$, et le groupe linéaire total aura en tout

$$p^2(p^2-1)(p^2-p) \text{ permutations.}$$

Il reste à chercher les diviseurs de ce groupe, qui peuvent jouir de la propriété d'être solubles par radicaux. Pour cela, nous allons faire une transformation qui a pour but d'abaisser autant que possible les équations générales de degré p^2 dont le groupe serait linéaire.

Premièrement, comme les substitutions circulaires d'un pareil groupe sont telles, que toute autre substitution du groupe les transforme les unes dans les autres, on pourra abaisser l'équation d'un degré, et considérer une équation de degré p^2-1 dont le groupe n'aurait que des substitutions de la forme

$$\left(b_{k_1,k_2},\quad b_{m_1k_1+m_2k_2,\,m_3k_1+n_4k_2}\right),$$

les p^2-1 lettres étant

$$\begin{array}{llll} & b_{0,1}, & b_{0,2}, & b_{0,3},\ldots \\ b_{1,0}, & b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3},\ldots \\ b_{2,0}, & b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3},\ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

J'observe maintenant que ce groupe est non primitif, en sorte que toutes les lettres où le rapport des deux indices est le même sont des lettres conjointes. Si l'on remplace par une seule lettre chaque système de lettres conjointes, on aura un groupe dont toutes les substitutions seront de la forme

$$\left(b_{\frac{k_1}{k_2}},\quad b_{\frac{m_1k_1+n_1k_2}{m_2k_1+n_2k_2}}\right),$$

$\frac{k_1}{k_2}$ étant les nouveaux indices. En remplaçant ce rapport par un seul indice k, on voit que les $p+1$ lettres seront

$$b_0,\quad b_1,\quad b_2,\quad b_3,\ldots,\quad b_{p-1},\quad b_{\frac{1}{0}}.$$

et les substitutions seront de la forme

$$\left(k, \quad \frac{mk+n}{rk+s}\right).$$

Cherchons combien de lettres, dans chacune de ces substitutions, restent à la même place; il faut pour cela résoudre l'équation

$$(rk+s)k - m(mk+n) = 0,$$

qui aura deux, ou une, ou aucune racine, suivant que $(m-s)^2 + 4nr$ sera résidu quadratique, nul ou non résidu quadratique. Suivant ces trois cas, la substitution sera de l'ordre $p-1$, ou p, ou $p-1$.

On peut prendre pour type des deux premiers cas les substitutions de la forme

$$(k, \quad mk+n),$$

où la seule lettre $\frac{b}{0}$ ne varie pas, et de là on voit que le nombre total des substitutions du groupe réduit est

$$(p+1)p(p-1).$$

C'est après avoir ainsi réduit ce groupe, que nous allons le traiter généralement. Nous chercherons d'abord dans quel cas un diviseur de ce groupe, qui contiendrait des substitutions de l'ordre p, pourrait appartenir à une équation soluble par radicaux.

Dans ce cas, l'équation serait primitive et elle ne pourrait être soluble par radicaux, à moins que l'on n'eût $p+1 = 2^n$, n étant un certain nombre.

Nous pouvons supposer que le groupe ne contienne que des substitutions de l'ordre p et de l'ordre $p+1$. Toutes les substitutions de l'ordre $p+1$ seront par conséquent semblables, et leur période sera de deux termes.

Prenons donc l'expression

$$\left(k, \quad \frac{mk+n}{rk+s}\right),$$

et voyons dans quel cas cette substitution peut avoir une période de deux termes. Il faut pour cela que la substitution inverse se confonde

avec elle. La substitution inverse est

$$\left(k, \quad \frac{-sk+n}{rk-m}\right).$$

Donc on doit avoir $m = -s$, et toutes les substitutions en question seront

$$\left(k, \quad \frac{mk+n}{k-m}\right),$$

ou encore

$$k, \quad m + \frac{N}{k-m},$$

N étant un certain nombre qui est le même pour toutes les substitutions, puisque ces substitutions doivent être transformées les unes dans les autres par toutes les substitutions de l'ordre p, $(k, k+m)$; or ces substitutions doivent, de plus, être conjuguées les unes des autres. Si donc

$$\left(k, \quad m + \frac{N}{k-m}\right), \quad \left(k, \quad n + \frac{N}{k-n}\right)$$

sont deux pareilles substitutions, il faut que l'on ait

$$n + \frac{N}{\frac{N}{k-m} + m - n} = m + \frac{N}{\frac{N}{k-n} + n - m},$$

savoir,

$$(m-n)^2 = 2N.$$

Donc la différence entre deux valeurs de m ne peut acquérir que deux valeurs différentes; donc m ne peut avoir plus de trois valeurs; donc enfin $p = 3$. Ainsi, c'est seulement dans ce cas que le groupe réduit pourra contenir des substitutions de l'ordre p.

Et, en effet, la réduite sera alors du quatrième degré, et par conséquent soluble par radicaux.

Nous savons par là qu'en général, parmi les substitutions de notre groupe réduit, il ne devra pas se trouver de substitutions de l'ordre p. Peut-il y en avoir de l'ordre $p-1$? C'est ce que je vais rechercher [*].

. . . . . .

[*] J'ai cherché inutilement dans les papiers de Galois la continuation de ce qu'on vient de lire. A. Ch.

SUR L'ÉQUATION

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\sin y + F(x)\cos y + \varphi(x) = 0;$$

PAR M. BESGE.

On sait que l'équation

$$(1) \qquad \frac{dz}{dx} + Pz^2 + Qz + R = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, s'intègre complétement dès qu'on en connaît une simple intégrale particulière. Je dis qu'il en est de même de la proposée

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} + f(x)\sin y + F(x)\cos y + \varphi(x) = 0.$$

Faisons, en effet,

$$\tang \frac{1}{2} y = z,$$

d'où

$$dy = \frac{2dz}{1+z^2},$$

et

$$\sin y = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos y = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on trouvera

$$2\frac{dz}{dx} + 2zf(x) + (1-z^2)F(x) + (1+z^2)\varphi(x) = 0.$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} + \frac{\varphi(x) - F(x)}{2}z^2 + f(x)z + \frac{\varphi(x) + F(x)}{2} = 0.$$

Mais cette dernière équation est de la forme (1); le théorème est donc démontré.

NOTE

SUR LES SURFACES ORTHOGONALES;

PAR M. J. BOUQUET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Dans le xxve cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, M. Chasles, a énoncé le théorème suivant :

« Si l'on considère la série des surfaces déterminée par l'équation

$$u = f(x, y, z) = \alpha,$$

» lorsqu'on fait varier le paramètre α, on peut toujours déterminer » deux autres séries de surfaces coupant les premières à angle droit et » suivant leurs lignes de courbure ; ou, en d'autres termes, il existe » deux nouvelles séries, qui, avec la première, forment un système de » surfaces orthogonales deux à deux. »

Peut-être, M. Chasles n'a-t-il point accordé une attention suffisante à ce théorème qui, dans son travail, n'était qu'un accessoire; car la conclusion à laquelle il a été conduit par un premier aperçu ne me paraît point rigoureuse.

Les tangentes aux lignes de courbure des surfaces $u = \alpha$ se partagent en deux groupes, et par chaque point de l'espace on peut mener une tangente de l'un et de l'autre groupe. Or, en considérant toutes les tangentes d'un même groupe, il existerait, si le théorème était exact, une série de surfaces normales aux droites qui correspondent à leurs divers points. Donc, en appelant X, Y, Z, des quantités proportionnelles aux cosinus des angles que les tangentes aux lignes de courbure de l'un des groupes font avec trois axes rectangulaires, on devrait avoir

identiquement, quels que soient x, y, z,

$$(1)\qquad X\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)+Y\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)+Z\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)=0.$$

Pour ne point compliquer les calculs, supposons que, dans l'équation

$$u=\alpha,$$

les variables x, y, z soient séparées, c'est-à-dire qu'elle ait la forme

$$\varphi_0(x)+\varphi_1(y)+\varphi_2(z)=\alpha.$$

On aura

$$\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydz}=\frac{d^2u}{dzdx}=0;$$

alors on peut prendre

$$(2)\qquad X=\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q},\quad Y=\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q},\quad Z=\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}\ [*],$$

Q étant l'une des racines de l'équation du second degré

$$(3)\qquad \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}+\frac{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}+\frac{\left(\frac{du}{dz}\right)^2}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}=0.$$

Les équations (2) donnent

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{dX}{dy}&=X\frac{\frac{dQ}{dy}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}, & \frac{dX}{dz}&=X\frac{\frac{dQ}{dz}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q},\\
\frac{dY}{dz}&=Y\frac{\frac{dQ}{dz}}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}, & \frac{dY}{dx}&=Y\frac{\frac{dQ}{dx}}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q},\\
\frac{dZ}{dx}&=Z\frac{\frac{dQ}{dx}}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}, & \frac{dZ}{dy}&=Z\frac{\frac{dQ}{dy}}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}.
\end{aligned}\right.$$

---

[*] Voyez *Calcul différentiel*, par M. l'abbé Moigno, page 365.

ce qui réduit l'équation (1) à

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &YZ\frac{dQ}{dx}\left(\frac{1}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}-\frac{1}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}\right)+ZX\frac{dQ}{dy}\left(\frac{1}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}-\frac{1}{\frac{d^2u}{dz^2}-Q}\right)\\ &\qquad\qquad +XY\frac{dQ}{dz}\left(\frac{1}{\frac{d^2u}{dy^2}-Q}-\frac{1}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Mais de l'équation (3) on tire

$$A^2\frac{dQ}{dx}=\frac{2\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}}{\frac{d^2u}{dx^2}-Q}-\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^3u}{dx^3}}{\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)^3},$$

ou

$$A^2\frac{dQ}{dx}=2X\frac{d^2u}{dx^2}-X^2\frac{d^3u}{dx^3};$$

de meme

$$A^2\frac{dQ}{dy}=2Y\frac{d^2u}{dy^2}-Y^2\frac{d^3u}{dy^3}.$$

$$A^2\frac{dQ}{dz}=2Z\frac{d^2u}{dz^2}-Z^2\frac{d^3u}{dz^3},$$

en faisant, pour abréger,

$$A^2=X^2+Y^2+Z^2.$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes des dérivées partielles de Q dans l'équation (5), XYZ sera facteur commun; en le supprimant et réduisant au même dénominateur, elle devient

$$\begin{aligned}&\left[2\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}-Q\right)-\frac{du}{dx}\frac{d^3u}{dx^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dy^2}-\frac{d^2u}{dz^2}\right)\\ +&\left[2\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}-Q\right)-\frac{du}{dy}\frac{d^3u}{dy^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{d^2u}{dx^2}\right)\\ +&\left[2\frac{d^2u}{dz^2}\left(\frac{d^2u}{dz^2}-Q\right)-\frac{du}{dz}\frac{d^3u}{dz^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0,\end{aligned}$$

ou

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\left[2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2-\frac{du}{dx}\frac{d^3u}{dx^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dy^2}-\frac{d^2u}{dz^2}\right)\\ +&\left[2\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)^2-\frac{du}{dy}\frac{d^3u}{dy^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{d^2u}{dx^2}\right)\\ +&\left[2\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)^2-\frac{du}{dz}\frac{d^3u}{dz^3}\right]\left(\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Or le premier membre de cette équation n'est pas identiquement nul, ainsi que cela devrait être pour l'exactitude du théorème en question.

Si l'on prend, par exemple, les ellipsoïdes semblables représentés par l'équation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=\alpha,$$

on a

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{a^2},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{d^3u}{dx^3}=0,$$

et l'équation (6) devient

$$\frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{b^4}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0,$$

ou

$$(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)=0,$$

qui est impossible, tant que les ellipsoïdes ne sont pas de révolution.

La condition (6) n'est pas non plus satisfaite quand on remplace u par l'une des fonctions

$$e^x+e^y+e^z,\quad \sin x+\sin y+\sin z,\quad \cos x+\cos y+\cos z;$$

mais elle l'est pour

$$u=l(x)+l(y)+l(z),$$

car, alors,

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{d^3u}{dx^3}=\frac{2}{x^3},$$

d'où

$$2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2-\frac{du}{dx}\frac{d^3u}{dx^3}=0,\ldots.$$

On peut prendre plus généralement

$$u=l(x-a)^\alpha+l(x-b)^\beta+l(x-c)^\gamma.$$

Les séries de surfaces déterminées par les équations

$$l(x)+l(y)+l(z)=\lambda,$$

ou

$$l(x-a)^\alpha+l(x-b)^\beta+l(x-c)^\gamma=\lambda,$$

sont les mêmes que celles-ci :

$$xyz = \lambda, \quad (x - a)(y - b)(z - c) = \lambda,$$

dans lesquelles le premier membre est le produit de trois fonctions où les variables sont séparées.

On pourrait, au reste, de la condition (6) déduire celle analogue qui se rapporte au cas de

$$u = \varphi(x)\varphi_1(y)\varphi_2(z);$$

car l'équation

$$\varphi(x)\varphi_1(y)\varphi_2(z) = \lambda$$

donne

$$l\varphi(x) + l\varphi_1(y) + l\varphi_2(z) = l\lambda,$$

et l'on rentre dans le premier cas.

NOTE

SUR LA SURFACE RÉGLÉE

DONT LES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX SONT ÉGAUX ET DIRIGÉS EN SENS CONTRAIRES;

PAR M. J.-A. SERRET.

1. On sait que l'hélicoïde gauche à plan directeur a, en chaque point, ses rayons de courbure principaux égaux et de sens contraires, et même que cette surface est la seule, parmi les surfaces réglées, qui jouisse de cette propriété. Dans un élégant Mémoire qui fait partie de l'un des derniers cahiers de ce Recueil, M. Michael Roberts a cherché à déduire ce théorème des équations intégrales que Monge a fait connaître, et qui représentent généralement toutes les surfaces dont les deux rayons de courbure sont égaux et de sens contraires. Cette marche avait déjà été indiquée par Legendre dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1787. On lit, en effet, à la page 314: *Si l'on cherche la surface la moindre entre deux lignes droites données, non situées dans le même plan, soient m la plus courte distance de ces lignes, λ l'angle qu'elles font entre elles, on pourra déterminer à priori la forme des fonctions φ et ψ, et il en résultera, pour l'équation de la surface cherchée, réduite à la forme la plus simple*,

$$z = x \operatorname{tang} \frac{\lambda y}{m}.$$

Mais le moyen le plus simple et le plus naturel de démontrer ce théorème consiste, ainsi que M. Wantzel l'a remarqué, dans une Note communiquée à la Société Philomatique en 1843, à combiner l'équation aux différentielles partielles des surfaces dont les deux rayons

de courbure sont égaux et de sens contraires avec les équations de la droite génératrice. On peut de la même manière déterminer les surfaces réglées que représente une équation aux différentielles partielles, plus générale, qui comprend un grand nombre de celles que Monge a considérées dans sa *Géométrie analytique*, et l'on simplifie beaucoup les substitutions en faisant subir à l'équation une transformation préalable que nous allons rappeler.

2. L'équation aux différentielles partielles des surfaces dont les deux rayons de courbure sont égaux et de sens contraires, est comprise, comme cas particulier, dans l'équation

$$(1) \qquad Rr + Ss + Tt + U(rt - s^2) = 0,$$

où R, S, T, U sont des fonctions données de p et q seulement. (Nous représentons, suivant l'usage, par p et q les dérivées du premier ordre $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, par r, s, t les dérivées du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$.)

A l'aide de la transformation indiquée par Legendre dans l'ouvrage déjà cité, on peut faire dépendre l'intégration de l'équation (1), de celle d'une équation linéaire, et voici comment.

Si l'on fait

$$(2) \qquad u = px + qy - z,$$

on aura

$$du = x\,dp + y\,dq,$$

à cause de

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

ce qui montre que, si l'on prend p et q pour variables indépendantes, au lieu de x et y, en sorte que x, y, et, par suite, z et u, soient considérés comme fonctions de p et q, on aura

$$(3) \qquad x = \frac{du}{dp}, \quad y = \frac{du}{dq}.$$

D'ailleurs, des équations

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

on tire

$$dx = \frac{t}{rt - s^2}\,dp - \frac{s}{rt - s^2}\,dq, \qquad dy = -\frac{s}{rt - s^2}\,dp + \frac{r}{rt - s^2}\,dq.$$

d'où

$$\frac{dx}{dp} = \frac{d^2u}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{dx}{dq} = \frac{dy}{dp} = \frac{d^2u}{dp\,dq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{dy}{dq} = \frac{d^2u}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

D'après cela, l'équation (1) deviendra

$$(4) \qquad R\frac{d^2u}{dq^2} - S\frac{d^2u}{dp\,dq} + T\frac{d^2u}{dp^2} + U = 0.$$

Celle-ci est linéaire; elle fera connaître u en fonction de p et q, on connaîtra ensuite x, y et z à l'aide des équations

$$x = \frac{du}{dp}, \quad y = \frac{du}{dq}, \quad z = p\frac{du}{dp} + q\frac{du}{dq} - u.$$

Il faut remarquer toutefois que, si l'équation (1) admettait des solutions communes avec l'équation

$$rt - s^2 = 0,$$

la méthode précédente ne pourrait les faire connaître; car, dans ce cas, il y aurait une équation entre p et q, et ces quantités ne pourraient plus dès lors être prises pour les variables indépendantes. On devra donc toujours chercher à part les surfaces développables qui pourraient satisfaire à l'équation (1).

3. Cherchons maintenant les surfaces réglées que l'équation (1) peut représenter. Soient

$$(5) \qquad \begin{cases} y = ax + A, \\ z = bx + B, \end{cases}$$

les équations de la génératrice, dans lesquelles a est un paramètre variable, et A, b, B sont des fonctions de ce paramètre.

On peut d'abord exprimer l'une des variables p et q à l'aide de la seconde et du paramètre a: car, si l'on passe d'un point à un point infiniment voisin de la même génératrice, on aura

$$dy = a\,dx, \quad dz = b\,dx;$$

et comme d'ailleurs

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

il viendra

$$b = p + aq,$$

ou

$$p = b - aq. \tag{6}$$

Si maintenant l'on porte dans l'équation (2), les valeurs de y, z et p tirées des équations (5) et (6), il viendra

$$u = \mathrm{A}q - \mathrm{B}. \tag{7}$$

Si l'on considère p, q et u comme trois coordonnées rectangulaires, les équations (6) et (7) seront celles d'une ligne droite, et nous serons ramenés à chercher la surface réglée que représente l'équation (4).

Si, dans la première des équations (5), on remplace y et x par leurs valeurs $\frac{du}{dq}$, $\frac{du}{dp}$, on aura

$$\frac{du}{dq} = a\frac{du}{dp} + \mathrm{A}, \tag{8}$$

que l'on aurait pu déduire directement des équations (6) et (7).

Cela posé, différentions l'équation (8) successivement par rapport à p et à q, dénotons par A′, b', B′ les dérivées de A, b et B, et remarquons enfin que l'équation (6) donne

$$\frac{da}{dp} = \frac{1}{b' - q}, \quad \frac{da}{dq} = \frac{a}{b' - q}.$$

on aura

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dp\,dq} = a\dfrac{d^2u}{dp^2} + \dfrac{\dfrac{du}{dp} + \mathrm{A}'}{b' - q}, \\[2ex] \dfrac{d^2u}{dq^2} = a\dfrac{d^2u}{dp\,dq} + a\dfrac{\dfrac{du}{dp} + \mathrm{A}}{b' - q} = a^2\dfrac{d^2u}{dp^2} + 2a\dfrac{\dfrac{du}{dp} + \mathrm{A}}{b' - q}. \end{cases}$$

Portant dans l'équation (4) les valeurs de p, $\frac{d^2u}{dp\,dq}$, $\frac{d^2u}{dq^2}$, tirées des équa-

tions (6) et (9), et dénotant par R_1, S_1, T_1, U_1 ce que deviennent R, S, T, U, par le changement de p en $b - aq$, on aura

$$(10)\qquad a^2R_1 - aS_1 + T_1\Big\{\frac{d^2u}{dp^2} + (2aR_1 - S_1)\frac{\frac{du}{dp} + A'}{b' - q} + U_1 = 0;$$

mais l'équation (7) donne

$$\frac{du}{dp} = \frac{A'q - B'}{b' - q}, \quad \frac{d^2u}{dp^2} = \frac{1}{b' - q}\frac{d}{da}\left(\frac{A'q - B'}{b' - q}\right),$$

et l'équation (10) devient

$$(11)\qquad \frac{d}{da}\left(\frac{A'q - B'}{b' - q}\right) + \frac{A'b' - B'}{b' - q}\cdot\frac{2aR_1 - S}{a^2R_1 - aS_1 + T_1} + \frac{(b' - q)U_1}{a^2R_1 - aS_1 + T_1} = 0.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que la surface réglée que nous considérons satisfasse à l'équation (1). En exprimant qu'elle doit avoir lieu quel que soit q, on aura plusieurs équations à l'aide desquelles on déterminera b, A et B.

4. Supposons qu'il s'agisse de la surface dont les deux rayons de courbure sont égaux et de sens contraires, on aura

$$R = 1 + q^2, \quad S = -2pq, \quad T = 1 + p^2, \quad U = 0,$$

et

$$a^2R_1 - aS_1 + T_1 = 1 + a^2 + b^2, \quad 2aR_1 - S_1 = 2(bq + a), \quad U_1 = 0,$$

et l'équation (11) deviendra

$$(12)\qquad \frac{d}{da}\left(\frac{A'q - B'}{b' - q}\right) + \frac{2(A'b' - B')}{1 + a^2 + b^2}\cdot\frac{bq + a}{b' - q} = 0,$$

ou, en effectuant la différentiation, et dénotant par b'', A'', B'' les secondes dérivées de b, A, B,

$$(13)\qquad (A'q - B')b'' = (b' - q)\left[(A''q - B'') - \frac{2(A'b' - B')}{1 + a^2 + b^2}(bq + a)\right];$$

cette équation devant avoir lieu, en particulier pour $q = b'$, on aura

$$A'b' - B' = 0, \quad \text{ou} \quad b'' = 0.$$

La première de ces deux équations ne saurait avoir lieu ; car, s'il en était ainsi, l'équation (12) donnerait

$$\frac{dA'}{da} = \frac{d}{da}\frac{B'}{b'} = 0,$$

d'où, en représentant par x', y', z' trois constantes arbitraires,

$$A = y' - ax' \quad \text{et} \quad B = z' - bx',$$

en sorte que les équations de la génératrice seraient

$$y - y' = a(x - x') \quad \text{et} \quad z - z' = b(x - x'),$$

ei représenteraient une surface conique faisant partie des surfaces $rt - s^2 = 0$ que nous avons exclues ; on a donc nécessairement

$$b'' = 0, \quad \text{d'où} \quad b = Ca + C',$$

C et C′ représentant deux constantes arbitraires.

Ce dernier résultat fait voir que la génératrice est constamment parallèle à un plan fixe, et, par conséquent, que la surface est à plan directeur. Si l'on prend ce plan pour celui des x et y, les constantes C et C′ seront nulles ; on aura

$$b = 0, \quad b' = 0,$$

et l'équation (13) deviendra

$$A''q - B'' - \frac{2B'a}{1 + a^2} = 0,$$

d'où

$$A'' = 0, \quad \text{et} \quad \frac{B''}{B'} + \frac{2a}{1 + a^2} = 0;$$

et, par l'intégration,

$$A = y' - ax', \quad B = z' + c \operatorname{arc\,tang} a,$$

x', y', z' et c désignant quatre constantes arbitraires. Les équations de la génératrice seront, d'après cela,

$$y - y' = a(x - x'), \quad \text{et} \quad z - z' = c \operatorname{arc\,tang} a,$$

ou simplement

$$y = ax, \quad \text{et} \quad z = c \operatorname{arc\,tang} a,$$

et l'équation de la surface sera enfin

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \frac{z}{c}.$$

qui est bien celle de l'héliçoïde gauche à plan directeur.

5. En considérant, comme nous l'avons fait, b, A, B comme des fonctions de a, on omettrait en général les surfaces pour lesquelles on a

$$a = \text{une constante}.$$

Mais il suffira évidemment, pour éviter cet inconvénient, de remplacer partout dans nos formules b' et b'' par $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{b\,a' - b'a''}{a'^2}$, et ainsi des autres; alors a, b, A et B seront considérés comme fonctions d'un paramètre indéterminé.

Dans l'exemple que nous avons traité, on pouvait supposer a variable, parce que la propriété géométrique exprimée par l'équation aux différentielles partielles est indépendante des axes coordonnés, et que cette équation restera la même par le changement des quantités z et y l'une en l'autre; si donc l'une des quantités a ou b est constante, on peut supposer que ce ne soit pas a, et il est évident qu'elles ne peuvent l'être en même temps, puisque alors la surface serait cylindrique, et par suite développable.

Quant aux surfaces développables, on devra les examiner à part; il est aisé de voir que toutes celles que représente notre équation

$$(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t = 0$$

sont imaginaires. Car, pour les surfaces développables,

$$\frac{dp^2}{r} = \frac{dp\,dq}{s} = \frac{dq^2}{t}.$$

d'où

$$(1 + q^2)\,dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)\,dq^2 = 0.$$

ou

$$dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2 = 0.$$

SUR UNE TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION

$$\sin\theta \frac{d.\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = 0;$$

PAR J. LIOUVILLE.

Cette équation

$$(1) \qquad \sin\theta \frac{d.\sin\theta \frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = 0$$

est celle qui définit les fonctions Y_n de la *Mécanique céleste*. En substituant aux variables θ et ϖ deux autres variables μ et ν, liées aux premières par les équations

$$\frac{\mu\nu}{bc} = \cos\theta, \quad \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}} = \sin\theta\cos\varpi, \quad \frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}} = \sin\theta\sin\varpi,$$

dont l'une quelconque rentre dans les deux autres, c'est-à-dire en prenant

$$\cos\theta = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad \operatorname{tang}\varpi = \frac{b}{c}\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}},$$

on la transforme dans la suivante :

$$(2) \qquad \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\Phi}{d\chi^2} + n(n+1)(\mu^2-\nu^2)\Phi = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = d\eta, \qquad \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = d\chi.$$

Et réciproquement on peut passer de l'équation (2) à l'équation (1) par une transformation inverse. La liaison intime qu'on reconnaît ainsi exister entre ces deux équations entraîne d'importantes conséquences,

comme on a pu le voir, par exemple, dans ma seconde Lettre à M. Blanchet (page 279 du présent volume). Je vais ici entrer dans tous les détails du calcul. On a besoin, en effet, de quelque artifice pour éviter de tomber dans des opérations d'une longueur rebutante.

D'abord, en faisant

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta = t, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{\sin\theta} = dt, \quad \cos\theta = \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}},$$

le premier membre de l'équation (1) devient

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = 0.$$

C'est cette dernière expression qu'il s'agit de transformer en partant de

$$\frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}} = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad \operatorname{tang}\varpi = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{c^2-\mu^2}{\mu^2-b^2}}\sqrt{\frac{\nu^2-c^2}{b^2-\nu^2}},$$

et comme on a de suite

$$n(n+1)\sin^2\theta.\Phi = n(n+1)\frac{b^2c^2-\mu^2\nu^2}{b^2c^2}.\Phi,$$

on n'a besoin de s'occuper que des deux premiers termes

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2}.$$

Pour cela, je me servirai du lemme suivant qui est bien connu et dont la démonstration s'offre d'ailleurs d'elle-même: « Si, en exprimant deux » variables t et ϖ, dont Φ dépend, par deux autres η, $\varkappa$, on trouve

$$dt^2 + d\varpi^2 = q(d\eta^2 + d\varkappa^2),$$

» il faudra en conclure que

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varkappa^2} = q\left(\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2}\right).$$

Montrons que la valeur de $dt^2 + d\varpi^2$ est, en effet, de la forme indiquée.

La relation entre $\mu\nu$ et t donne

$$e^{2t} = \frac{bc-\mu\nu}{bc+\mu\nu}, \quad \text{d'où} \quad t = \tfrac{1}{2}\log(bc-\mu\nu) - \tfrac{1}{2}\log(bc+\mu\nu);$$

donc

$$dt = -\frac{bc(\mu d\nu + \nu d\mu)}{b^2c^2 - \mu^2\nu^2}.$$

En posant

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} = d\eta, \qquad \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} = d\chi,$$

cette valeur de dt devient

$$dt = -\frac{bc}{b^2c^2 - \mu^2\nu^2}\left\{\mu\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\,.\,d\chi + \nu\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\,.\,d\eta\right\}.$$

D'un autre côté, l'équation

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{b}{c}\frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}$$

donne

$$\cos^2\varpi = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2\varpi} = \frac{c^2(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{c^2 - b^2 - b^2c^2 - \mu^2\nu^2}.$$

et

$$\frac{d\varpi}{\cos^2\varpi} = \frac{b}{c}\left(\frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}}\,d\frac{\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}} + \frac{\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}\,d\frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}}\right).$$

A cause de

$$d\frac{\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - \nu^2}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}} = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - \nu^2}\,\nu d\nu,$$

$$d\frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} = -\frac{c^2 - b^2}{\mu^2 - b^2}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}} = -\frac{c^2 - b^2}{\mu^2 - b^2}\,\mu d\mu,$$

on en conclut facilement

$$d\varpi = \frac{bc}{b^2c^2 - \mu^2\nu^2}\left\{\nu\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\,.\,d\chi - \mu\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\,.\,d\eta\right\}.$$

Enfin, les expressions de dt et $d\varpi$ réunies donnent

$$dt^2 + d\varpi^2 = \frac{b^2c^2(\mu^2 - \nu^2)}{b^2c^2 - \mu^2\nu^2}(d\eta^2 + d\chi^2).$$

Donc, par le lemme invoqué,

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{d^2\Phi}{d\varpi^2} = \frac{b^2c^2 - \mu^2\nu^2}{b^2c^2(\mu^2 - \nu^2)}\left(\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d^2\Phi}{d\chi^2}\right).$$

Ainsi le premier membre de l'équation (1) est identiquement égal à

$$\frac{b^2c^2-\mu^2\nu^2}{b^2c^2(\mu^2-\nu^2)}\left[\frac{d^2\Phi}{d\mu^2}-\frac{d^2\Phi}{d\nu^2}+n(n+1)(\mu^2-\nu^2)\Phi\right].$$

Par suite, l'équation (1) elle-même se transforme dans l'équation (2), et réciproquement.

On satisfait, comme on sait, à l'équation (2) par une expression de la forme ΣAMN contenant $2n+1$ constantes arbitraires A et $2n-1$ produits MN d'une fonction entière de μ, $\sqrt{\mu^2-b^2}$, $\sqrt{c^2-\mu^2}$ par une fonction semblable de ν, $\sqrt{b^2-\nu^2}$, $\sqrt{c^2-\nu^2}$, et l'on est ainsi conduit à exprimer les fonctions Y_n, et par suite des fonctions quelconques où les variables sont prises entre certaines limites, par une somme de produits MN. Voyez sur ce point la Lettre citée.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR J. LIOUVILLE.

Soit $x^n + Px^{n-1} + \ldots$ ou $F(x)$ un polynôme de degré n, et $Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots$ ou $f(x)$ un polynôme de degré $(n-1)$ au plus. Considérons l'équation de degré n,

$$F(x) + \alpha f(x) = 0,$$

α désignant un paramètre indéterminé qui n'entre ni dans $F(x)$, ni dans $f(x)$. La somme des racines x s'exprimera par une fonction linéaire de ce paramètre, et, en la représentant par $\sum x$, on aura

$$\sum x = -P - \alpha A.$$

d'où

$$\sum \frac{dx}{d\alpha} = -A.$$

Mais l'équation

$$F(x) + \alpha f(x) = 0$$

donne

$$\frac{dx}{d\alpha} = -\frac{f(x)}{F'(x) + \alpha f'(x)},$$

donc

$$\sum \frac{f(x)}{F'(x) + \alpha f'(x)} = A.$$

En faisant $\alpha = 0$, cette formule prend une forme plus simple, et l'on a

$$\sum \frac{f(x)}{F'(x)} = A,$$

le signe $\sum$ se rapportant actuellement aux racines de

$$F(x) = 0$$

racines que nous supposerons toutes inégales entre elles, ce qui est le cas général.

Si $f(x)$ n'est que de degré $(n-2)$ au plus, alors A est nul, et il vient

$$\sum \frac{f(x)}{F'(x)} = 0.$$

Or on sait que cette formule contient implicitement toute la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Et, en effet, si on l'applique au cas de

$$F(x) = (x - t)\varphi(x),$$

on en déduira de suite la formule fondamentale

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \sum \frac{f(x)}{(t-x)\varphi'(x)},$$

où le signe $\sum$ se rapporte aux racines de

$$\varphi(x) = 0,$$

et dans le premier membre de laquelle le degré du numérateur est inférieur au moins d'une unité à celui du dénominateur.

SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx;$$

PAR J. LIOUVILLE.

Le produit $e^{-x}x^n$ s'évanouit aux deux limites 0 et ∞, il n'a d'ailleurs qu'un seul maximum qui répond à $x = n$: on peut donc poser

$$e^{-x}x^n = e^{-n}n^n e^{-t^2},$$

en faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$, et l'on a

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = e^{-n}n^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dx}{dt}\,dt.$$

En prenant les logarithmes des deux membres, la relation entre x et t se met sous la forme

$$x - n\log x = n - n\log n - t^2.$$

Soit $x = n + u$; elle deviendra

$$u - n\log(n+u) = t^2 - n\log n.$$

Mais, en désignant par θ une quantité essentiellement comprise entre 0 et 1, on a, d'après la formule de Taylor,

$$\log(n+u) = \log n + \frac{u}{n} - \frac{u^2}{2(n+\theta u)^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{nu^2}{2(n+\theta u)^2} = t^2,$$

d'où

$$u = \frac{nt\sqrt{2}}{\sqrt{n} - \theta t\sqrt{2}}.$$

Mais de l'équation

$$x - n\log x = n - n\log n + t^2,$$

on déduit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2xt}{x-n} = 2t + \frac{2nt}{u}.$$

Donc, en mettant pour u sa valeur, on a

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2n} - 2(1 - \theta)t;$$

par suite, et à cause de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (1 - \theta) t dt \right].$$

Or la valeur numérique de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (1 - \theta) t dt,$$

où le facteur $1 - \theta$ est positif et < 1, est évidemment inférieure à celle de

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t dt = \tfrac{1}{2}.$$

Donc pour $n = \infty$ son quotient par $\sqrt{2n\pi}$ se réduit à zéro. De là une démonstration rigoureuse et assez simple de cette proposition connue, que le rapport des deux quantités

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx, \quad e^{-n} n^n \sqrt{2n\pi},$$

a pour limite l'unité lorsque n grandit indéfiniment.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ;

PAR J. LIOUVILLE.

Ayant n équations de la forme

$$\frac{a}{K-A}+\frac{b}{K-B}+\frac{c}{K-C}+\ldots=1,$$

$$\frac{a}{K_1-A}+\frac{b}{K_1-B}+\frac{c}{K_1-C}+\ldots=1,$$

$$\frac{a}{K_2-A}+\frac{b}{K_2-B}+\frac{c}{K_2-C}+\ldots=1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on propose d'en tirer les valeurs des n inconnues a, b, c,....

M. J. Binet a résolu cette question d'une manière simple dans une Note imprimée au tome II de ce Journal (page 248). Mais le procédé suivant est peut-être plus rapide encore.

On peut regarder les n quantités K, K_1, K_2,... comme étant les racines de l'équation unique

$$\frac{a}{K-A}+\frac{b}{K-B}+\frac{c}{K-C}+\ldots=1,$$

qui est de degré n par rapport à K. En posant donc

$$K=A-t,$$

on en conclura que les différences

$$A-K,\quad A-K_1,\quad A-K_2,\ldots,$$

sont les valeurs des racines t de

$$1+\frac{a}{t}+\frac{b}{t+B-A}+\frac{c}{t+C-A}+\ldots=0.$$

Or, en chassant les dénominateurs pour réduire cette équation à la forme ordinaire, $t^n + \ldots = 0$, on voit sans calcul que le terme indépendant de t est égal à

$$a.(B - A)(C - A)\ldots.$$

En le comparant au produit des racines, on a, par suite,

$$(A - K)(A - K_1)(A - K_2)\ldots = (-1)^n.a.(B - A)(C - A)\ldots,$$

d'où

$$a = -\frac{(A - K)(A - K_1)(A - K_2)\ldots}{(A - B)(A - C)\ldots},$$

comme l'a trouvé M. Binet. De simples changements de lettres donneront ensuite les expressions de b, c,....

Nota. Je reçois à l'instant un Mémoire de M. Chelini, dans lequel se trouve la même méthode. Si je l'avais connu plus tôt, je n'aurais pas fait imprimer le présent article, que je conserve néanmoins maintenant, parce qu'après tout il peut être utile à ceux de nos lecteurs qui ne connaîtraient pas le travail de M. Chelini.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. J. STEINER.

Extrait d'un Mémoire lu à l'Académie de Berlin le 27 novembre 1845.

1. Une courbe du troisième ordre contient, en général, 27 points dans chacun desquels elle peut avoir un contact du cinquième ordre avec une conique. Parmi ces 27 points, il y en a 9 de réels et 18 d'imaginaires. L'équation du vingt-septième degré, qui détermine ces 27 points, est toujours algébriquement résoluble; résultat intéressant pour l'algèbre.

Parmi ces 27 points P, il s'en trouve cent huit fois 3 situés dans une même droite, et ces 108 droites présentent à leur tour des relations remarquables, tant entre elles qu'avec d'autres droites et points qui dépendent de la courbe. C'est ainsi, par exemple, que neuf fois 3 des 9 points réels P se trouvent dans une même droite, et que 3 de ces droites, qui se distinguent essentiellement des 6 autres, se coupent en un même point Q. Le nombre de ces points Q est 12, pourvu qu'on prenne en considération tous les 27 points P, et ces points Q ont d'ailleurs d'autres rapports remarquables avec la courbe, etc., etc.

2. Si après avoir choisi deux points fixes quelconques P et Q d'une courbe du troisième ordre, l'on prend sur la même courbe un point A entièrement arbitraire, et que l'on tire la droite PA qui rencontrera la courbe en un troisième point B, que l'on tire la droite QB qui rencontrera la courbe en un troisième point C, que l'on tire la droite PC qui coupera la courbe en un nouveau point D, et que l'on continue ainsi à tirer les droites QDE, PEF, QFG,..., qui déterminent successivement les points E, F, G,..., on formera un polygone inscrit ABCDEFG... dont les côtés passent alternativement par les deux points fondamentaux P et Q, et qui pourra présenter deux cas différents. Il peut arriver que ce polygone ne se ferme jamais, quelque loin que l'on pousse la construction invoquée, ou qu'il forme une figure rentrante en elle-

même d'un nombre pair égal à $2n$ de côtés. Dans le second de ces deux cas on a ce théorème :

« Si le polygone en question se ferme pour un point de départ dé-
» terminé A, il se fermera toujours et aura toujours le même nombre
» de côtés $2n$, quel que soit le point A. »

Si après avoir tiré la droite PQ, qui coupe la courbe en un troisième point R, on mène de ce dernier une tangente qui touche la courbe au point S, on aura ce théorème :

« Si les points fondamentaux P et Q sont tels, qu'à ces points réponde
» un polygone fermé ayant un nombre de côtés égal à $2n$, chacun des
» deux couples de points P et S, Q et S donnera également lieu à des
» polygones rentrants, mais dont les côtés seront au nombre de $4n$. »

Étant donc donnés deux points fondamentaux P et Q auxquels répond un polygone fermé de $2n$ côtés, il sera facile d'en déduire deux autres points fondamentaux P et S, ou Q et S, auxquels correspondra un polygone d'un nombre double de côtés, et réciproquement.

Dans une courbe donnée du troisième ordre, il existe toujours une infinité de couples de points fondamentaux auxquels correspond un polygone fermé dont le nombre des côtés est un nombre pair quelconque. On peut même arbitrairement choisir l'un de ces points : l'autre comportera alors un certain nombre de positions différentes.

Les couples de points qui donnent lieu à des polygones rentrants sont définis par le théorème donné ci-dessus, et leurs propriétés caractéristiques peuvent s'énoncer comme il suit pour les cas les plus simples :

1°. Pour que le polygone soit un quadrilatère, il faut que les tangentes en P et Q se rencontrent en un point de la courbe. On voit que, pour ce cas, rien n'est plus simple que de trouver des points fondamentaux, et l'on conclut que, P étant pris d'une manière arbitraire, Q comportera trois positions différentes. On voit encore comment on peut assigner les points fondamentaux P et S pour un nombre de côtés égal à 8, et que, dans ce cas, P étant donné, S sera susceptible généralement de 12 positions.

2°. Pour que le polygone soit un hexagone, il faut, après avoir construit les tangentes en P et Q, que je suppose couper, respectivement, la courbe en P_1 et Q_1, et joint les points P et Q_1, Q et P_1, que

le point de concours T de ces dernières droites soit sur la courbe. Ce cas présente cela de particulier, que les couples P et T, Q et T donnent également lieu à des hexagones, et l'on satisfera encore à la question au moyen de deux quelconques des trois points P_1, Q_1, T_1, ce dernier étant le point où la courbe est rencontrée par la tangente au point T. On peut aussi, dans ce cas, prendre pour points fondamentaux deux quelconques des points de rebroussement de la courbe, et l'on peut d'ailleurs facilement obtenir, au moyen de ces derniers, tous les points fondamentaux de la courbe. Soient U et V deux points de rebroussement, et X un point quelconque de la courbe. Cela étant, si l'on tire les droites XU, XV, les deux troisièmes points où ces droites rencontreront la courbe seront toujours des points fondamentaux P et Q. On conclut de là qu'à un point déterminé P correspondent toujours 8 points Q, et que, P étant réel, de ces 8 points 2 seront réels, les 6 autres imaginaires, etc.

3°. Dans le cas du décagone, P et Q doivent satisfaire à la condition suivante : Soient P_1 et Q_1 les deux points où la courbe est rencontrée par les tangentes en P et Q; soient encore P_2 et Q_2 les points où la courbe est coupée par les droites PQ_1, QP_1, et enfin P_3 et Q_3 les points de rencontre de la courbe et des droites PQ_2, QP_2. Cela posé, il faudra que le point où les droites PQ_3, QP_3 se rencontrent, se trouve sur la courbe.

3. Si une courbe du quatrième ordre a deux points doubles P et Q, on pourra lui inscrire d'une manière semblable des polygones ABCDEF..., dont les côtés passent alternativement par les points P et Q, et l'on aura toujours la loi déjà énoncée :

Que si le polygone se ferme une seule fois, il se fermera toujours, quel que soit le point de départ, et que le nombre $2n$ des côtés sera toujours le même.

Remarque. Les théorèmes précédents ont lieu d'une manière analogue lorsque les côtés des polygones, au lieu d'être des droites, sont des coniques, savoir : Si dans la courbe donnée on choisit arbitrairement 3 points O, Y, Z, par lesquels et alternativement par P et Q, on fait passer des coniques, et si ensuite l'on construit, au moyen de ces coniques, le polygone inscrit, etc., etc.

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 + n\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}};$$

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. En cherchant la valeur de cette intégrale, nous considérerons séparément les trois formes admissibles de n : savoir, celles du paramètre d'une fonction elliptique de la troisième espèce, au module k. On verra que son évaluation dépend des fonctions elliptiques et de la transcendante Υ, qui figure d'une manière si importante dans les recherches de M. Jacobi, relatives à la réduction des fonctions à paramètre logarithmique.

1°. Soit $n = -k^2\sin^2\theta$. On aura donc, en désignant par u l'intégrale dont on cherche la valeur, et en la différentiant par rapport à θ,

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\theta} &= -2k^2\sin\theta\cos\theta\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi}{1 - k^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\\ &= 2\operatorname{cotang}\theta\,[\mathrm{F}(k) - \Pi(-k^2\sin^2\theta, k)].\end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$\Pi(-k^2\sin^2\theta, k) = \mathrm{F}(k) + \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}[\mathrm{F}(k)\mathrm{E}(k, \theta) - \mathrm{E}(k)\mathrm{F}(k, \theta)]$$

(*Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 141); ce qui donne

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}[\mathrm{E}(k)\mathrm{F}(k, \theta) - \mathrm{F}(k)\mathrm{E}(k, \theta)],$$

d'où l'on déduit, en mettant, suivant l'usage,

$$\int\frac{\mathrm{E}(k, \theta)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}\,d\theta = \Upsilon(k, \theta),$$

$$(1)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\log(1 - k^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \mathrm{E}(k)[\mathrm{F}(k, \theta)]^2 - 2\mathrm{F}(k)\Upsilon(k, \theta).$$

Si l'on y fait $\theta = \frac{1}{2}\pi$, on trouvera, en se rappelant que

$$\Upsilon(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}(k)\,\mathrm{E}(k) - \tfrac{1}{2}\log k',$$

k' étant le complément de k (*Traité des Fonctions elliptiques*, tome III, page 156),

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \log(k')\,\mathrm{F}(k),$$

formule que j'ai démontrée déjà dans un Mémoire inséré dans le cahier de mai.

2°. Soit $n = \operatorname{cotang}^2\theta$, et nous verrons aisément que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sin\theta\cos\theta}\left[\Pi(\operatorname{cotang}^2\theta, k) - \mathrm{F}(k)\right].$$

Or on a

$$\frac{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}}{\sin\theta\cos\theta}\,\Pi(\operatorname{cotang}^2\theta, k) = \tfrac{1}{2}\pi + \mathrm{F}(k)\left[\operatorname{tang}\theta\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta} - \mathrm{E}(k', \theta)\right]$$
$$- \left[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\right]\mathrm{F}(k', \theta)$$

(Legendre, tome I, page 144), en sorte que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}}$$
$$\times\left\{\tfrac{1}{2}\pi + \mathrm{F}(k)\left[\operatorname{tang}\theta\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta} - \mathrm{E}(k', \theta)\right] - \left[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\right]\mathrm{F}(k', \theta)\right\}$$
$$- \frac{2\mathrm{F}(k, \theta)}{\sin\theta\cos\theta},$$

et, par conséquent,

$$u = \pi\mathrm{F}(k', \theta) - 2\mathrm{F}(k)\,\Upsilon(k', \theta) - \left[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\right]\left[\mathrm{F}(k', \theta)\right]^2$$
$$- 2\mathrm{F}(k)\log\sin\theta + \mathcal{C}.$$

Pour déterminer la valeur de la constante $\mathcal{C}$, faisons $\theta = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne $u = 0$, et l'on aura

$$\pi\mathrm{F}(k') - \mathrm{F}(k)\left[\mathrm{F}(k')\,\mathrm{E}(k') - \log k\right] - \left[\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\right]\left[\mathrm{F}(k')\right]^2 + \mathcal{C} = 0.$$

Si l'on y substitue, pour π, sa valeur connue

$$2\left[\mathrm{F}(k)\,\mathrm{E}(k') + \mathrm{F}(k')\,\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\,\mathrm{F}(k')\right],$$

on obtiendra

$$\left[\mathrm{F}(k)\,\mathrm{E}(k') + \mathrm{F}(k')\,\mathrm{E}(k) - \mathrm{F}(k)\,\mathrm{F}(k')\right]\mathrm{F}(k') - \mathrm{F}(k)\log k + \mathcal{C} = 0,$$

ou bien encore

$$\frac{\pi}{2}F(k') + F(k)\log(k) + \varepsilon = 0.$$

On trouve donc finalement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 + \operatorname{cotang}\varphi \sin\varphi)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi \\ &= \pi F(k', \theta) - 2F(k)\Upsilon(k', \theta) - [E(k) - F(k)][F(k', \theta)]^2 \\ &- 2F(k)\log\sin\theta - \tfrac{1}{2}\pi F(k') - F(k)\log k. \end{aligned}\right.$$

3°. Soit $n = -1 + k'^2\sin^2\theta$, et l'on aura

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2k'^2\sin\theta\cos\theta}{1 - k'^2\sin^2\theta}[\Pi(-1 + k'^2\sin^2\theta, k) - F(k)].$$

Mais Legendre a démontré (tome I, page 138) que

$$\frac{k'^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}}[\Pi(-1 + k'^2\sin^2\theta, k) - F(k)] = \tfrac{1}{2}\pi - F(k)E(k', \theta)$$
$$- [E(k) - F(k)]F(k', \theta),$$

ce qui donne

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\theta}}\left\{\tfrac{1}{2}\pi - F(k)E(k', \theta) - [E(k) - F(k)]F(k', \theta)\right\},$$

et, en intégrant,

$$u = \pi F(k', \theta) - 2F(k)\Upsilon(k', \theta) - [E(k) - F(k)][F(k', \theta)]^2 + \varepsilon.$$

Pour avoir la valeur de ε, faisons $\theta = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donne, comme on sait,

$$u = \log(k'F(k)),$$

et nous trouverons

$$\log(k'F(k)) = \pi F(k') - F(k)(F(k')E(k') - \log k)$$
$$- [E(k) - F(k)][F(k')]^2 - \varepsilon,$$

d'où l'on déduit, après quelques réductions,

$$\varepsilon = \log\left(\frac{k'}{k}\right)F(k) - \tfrac{1}{2}\pi F(k'),$$

et, par conséquent,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log[1-(1-k'^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi]}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \\ &= \pi F(k',\theta) - 2F(k)\Upsilon(k',\theta) - [E(k)-F(k)][F(k,\theta)]^2 \\ &\qquad + \log\left(\frac{k'}{k}\right)F(k) - \tfrac{1}{2}\pi F(k'). \end{aligned}\right.$$

2. Dans l'équation (1), faisons

$$\sin^2\theta = \frac{1}{1+k'},$$

c'est-à-dire, soit θ l'amplitude qui sert à la bissection de la fonction complète, et nous aurons

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos^2\varphi + k'\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \tfrac{1}{4}F(k)E(k) - 2F(k)\Upsilon(k,\theta).$$

Maintenant, Legendre a démontré [*] que

$$\Upsilon(\psi) = 4\Upsilon(\varphi) + \log(1-k^2\sin^4\varphi),$$

lorsque les deux amplitudes ψ et φ satisfont à la formule de duplication,

$$F(k,\psi) = 2F(k,\varphi).$$

Dans cette relation, mettons $\psi = \frac{1}{2}\pi$, ce qui donnera $\varphi = \theta$, et nous aurons

$$4\Upsilon(k,\theta) = \tfrac{1}{2}F(k)E(k) - \log\left(\frac{2k'\sqrt{k'}}{1+k'}\right),$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos^2\varphi + k'\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2k'\sqrt{k'}}{1+k'}\right)F(k),$$

résultat qui coïncide avec la formule (23) de mon Mémoire déjà cité.

3. Si dans l'équation (3), on pose $\theta = 0$, on obtiendra

$$(4)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\cos\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{k'}{k}\right)F(k) - \tfrac{1}{4}\pi F(k').$$

---

[*] *Traité des Fonctions elliptiques*, tome III, n° 188.

Maintenant, transformons l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

en prenant un nouvel angle ψ donné par la formule

$$k' \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = 1,$$

ce qui nous fera voir sans difficulté que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log\left(\frac{1}{k'\operatorname{tang}\varphi}\right) \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et, par conséquent,

$$(5) \qquad \int^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k'}\right) \mathrm{F}(k').$$

Combinant encore les équations (4) et (5) entre elles, on parviendra à la formule suivante:

$$(6) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(\sin\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{k}\right) \mathrm{F}(k) - \tfrac{1}{4}\pi \mathrm{F}(k').$$

En se rappelant que la limite de $\mathrm{F}(k')$ est $\left(\frac{4}{k}\right)$, lorsque k devient très-petit, on déduira facilement, des équations (4) et (6), les résultats bien connus, savoir

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \log(\sin\varphi)\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\log\tfrac{1}{2}.$$

4. A cause de la liaison de notre intégrale (u) avec la théorie des fonctions elliptiques, il est bon de remarquer qu'elle peut s'écrire de la manière suivante. Soient x une fonction de première espèce au module k, $\mathrm{A}(x)$ son amplitude, et X la fonction complète, et il est évident que

$$u = \int_0^{\mathrm{X}} \log[1 + n\sin^2\mathrm{A}(x)]\,dx.$$

Je finirai en mentionnant qu'il existe une relation très-simple entre les

fonctions complètes de troisième espèce,

$$\Pi(k^2 \operatorname{tang}^2 \theta, k) \quad \text{et} \quad \Pi(-k'^2 \sin^2 \theta, k'),$$

dont les modules sont complémentaires, et dont les paramètres ont des caractères opposés; en effet, on a

$$\Pi(k^2 \operatorname{tang}^2 \theta, k) F(k') - \cos^2 \theta \, \Pi(-k'^2 \sin^2 \theta, k') F(k)$$
$$= \tfrac{1}{2} \pi \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} F(k', \theta),$$

comme on peut le prouver en substituant, au lieu des fonctions Π, leurs valeurs en F et E; ou bien encore, à priori, par les mêmes considérations de géométrie, dont M. Chasles a fait usage pour démontrer la relation de Legendre entre les fonctions complètes F, E, aux modules complémentaires, c'est-à-dire par l'emploi des coordonnées elliptiques.

Sur les sommes des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique;

PAR M. PUISEUX.

1. Pour abréger, nous désignerons, dans ce qui va suivre, par $(y)_p$ le produit

$$y(y-1)(y-2)\ldots(y-p+1),$$

où p désigne un nombre entier et positif, y étant quelconque; on aura alors

$$(y)_1 = y.$$

Cela posé, faisons

$$(1)\qquad \varphi x = \frac{x^{a+m}-x^a}{x-1} = x^a + x^{a+1} + x^{a+2} + \ldots + x^{a+m-1},$$

m étant entier et positif, et soient, de plus,

$$(2)\qquad \varphi_1 x = x^{b-a+1}\varphi' x,\quad \varphi_2 x = x^{c-b+1}\varphi_1' x,\quad \varphi_3 x = x^{d-c+1}\varphi_2' x,\ \text{etc.};$$

nous déduirons de ces équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varphi_1 x &= ax^b + (a+1)x^{b+1} + (a+2)x^{b+2} + \ldots + (a+m-1)x^{b+m-1},\\
\varphi_2 x &= abx^c + (a+1)(b+1)x^{c+1} + (a+2)(b+2)x^{c+2} + \ldots\\
&\qquad + (a+m-1)(b+m-1)x^{c+m-1},\\
\varphi_3 x &= abcx^d + (a+1)(b+1)(c+1)x^{d+1} + \ldots\\
&\qquad + (a+m-1)(b+m-1)(c+m-1)x^{d+m-1},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Appelons

$$\varphi,\quad \varphi_1,\quad \varphi_2,\ldots,\quad \varphi',\quad \varphi_1',\ldots,\quad \varphi'',\quad \text{etc.}$$

ce que deviennent, pour $x = 1$, les fonctions

$$\varphi x,\quad \varphi_1 x,\quad \varphi_2 x,\ldots,\quad \varphi' x,\quad \varphi_1' x,\ldots,\quad \varphi'' x,\quad \text{etc.},$$

et faisons $x = 1$ dans les équations (3); elles nous donneront

$$(4)\quad \begin{cases} a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+m-1) = \varphi_1, \\ ab + (a+1)(b+1) + (a+2)(b+2) + \ldots \\ \qquad\qquad + (a+m-1)(b+m-1) = \varphi_2, \\ abc + (a+1)(b+1)(c+1) + \ldots \\ \qquad\qquad + (a+m-1)(b+m-1)(c+m-1) = \varphi_3, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

2. Pour avoir les valeurs des seconds membres φ_1, φ_2, etc., différentions l'équation

$$(x-1)\varphi x = x^{a+m} - x^a;$$

il viendra

$$(5)\quad \begin{cases} (x-1)\varphi' x + \varphi x = (a+m)_1 x^{a+m-1} - (a)_1 x^{a-1}, \\ (x-1)\varphi'' x + 2\varphi' x = (a+m)_2 x^{a+m-2} - (a)_2 x^{a-2}, \\ (x-1)\varphi''' x + 3\varphi'' x = (a+m)_3 x^{a+m-3} - (a)_3 x^{a-3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x-1)\varphi^{p+1} x + (p+1)\varphi^p x = (a+m)_{p+1} x^{a+m-p-1} - (a)_{p+1} x^{a-p-1}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

D'un autre côté, en différentiant les équations (2), nous aurons

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi_1 x = x^{b-a+1}\varphi' x, \\ \varphi'_1 x = (b-a+1)_1 x^{b-a}\varphi' x + x^{b-a+1}\varphi'' x, \\ \varphi''_2 x = (b-a+1)_2 x^{b-a-1}\varphi' x + 2(b-a+1)_1 x^{b-a}\varphi'' x + x^{b-a-1}\varphi''' x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^p_1 x = (b-a+1)_p x^{b-a-p+1}\varphi' x + \frac{p}{1}(b-a+1)_{p-1} x^{b-a-p+2}\varphi'' x \\ \qquad + \frac{p(p-1)}{1.2}(b-a+1)_{p-2} x^{b-a-p+3}\varphi''' x + \ldots + x^{b-a+1}\varphi^{p+1} x. \\ \text{etc.}; \\ \varphi_2 x = x^{c-b+1}\varphi'_1 x, \\ \varphi'_2 x = (c-b+1)_1 x^{c-b}\varphi'_1 x + x^{c-b+1}\varphi''_1 x, \\ \varphi''_2 x = (c-b+1)_2 x^{c-b-1}\varphi'_1 x + 2(c-b+1)_1 x^{c-b}\varphi''_1 x + x^{c-b-1}\varphi'''_1 x. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^p_2 x = (c-b+1)_p x^{c-b-p+1}\varphi'_1 x + \frac{p}{1}(c-b-1)_{p-1} x^{c-b-p+2}\varphi''_1 x + \ldots \\ \qquad + x^{c-b+1}\varphi^{p+1}_1 x. \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Faisons maintenant

$$x = 1$$

dans les équations (5) et (6), et nous trouverons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= (a+m)_1 - (a)_1, \\ 2\varphi' &= (a+m)_2 - (a)_2, \\ 3\varphi'' &= (a+m)_3 - (a)_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p+1)\varphi^{(p)} &= (a+m)_{p+1} - (a)_{p+1}, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}\right.$$

et

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi', \\ \varphi'_1 &= (b-a+1)_1\varphi' + \varphi'', \\ \varphi''_1 &= (b-a+1)_2\varphi' + 2(b-a+1)_1\varphi'' + \varphi''', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(p)} &= (b-a+1)_p\varphi' + \frac{p}{1}(b-a+1)_{p-1}\varphi'' \\ &\qquad + \frac{p(p-1)}{1.2}(b-a+1)_{p-2}\varphi''' + \ldots + \varphi^{p+1}, \\ &\text{etc.}; \\ \varphi_2 &= \varphi'_1, \\ \varphi'_2 &= (c-b+1)_1\varphi'_1 + \varphi''_1, \\ \varphi''_2 &= (c-b+1)_2\varphi'_1 + (c-b+1)_1\varphi''_1 + \varphi'''_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_2^{(p)} &= (c-b+1)_p\varphi'_1 + \frac{p}{1}(c-b+1)_{p-1}\varphi''_1 + \ldots + \varphi_1^{p+1}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right.$$

En substituant, dans les équations (8), les valeurs de φ', φ'', φ''', etc., tirées des équations (7), nous en déduirons aisément les valeurs de φ_1, φ_2, φ_3, etc., et, en portant ces dernières dans les équations (4), nous obtiendrons les formules suivantes :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+m-1) = \frac{(a+m)^2 - (a)^2}{2},\\
&ab + (a+1)(b+1) + \ldots + (a+m-1)(b+m-1)\\
&\qquad = (b-a+1)\cdot\frac{(a+m)^2-(a)^2}{2} + \frac{(a+m)^3-(a)^3}{3},\\
&abc + (a+1)(b+1)(c+1) + \ldots + (a+m-1)(b+m-1)(c+m-1)\\
&\qquad = (b-a+1)(c-a+1)\frac{(a+m)^2-(a)^2}{2}\\
&\qquad\quad + (b+c-2a+3)\frac{(a+m)^3-(a)^3}{3} + \frac{(a+m)^4-(a)^4}{4},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

En développant les seconds membres, on trouvera, comme il était aisé de le prévoir, que celui de la première formule est une fonction linéaire de a, celui de la deuxième une fonction linéaire de chacune des quantités a et b, celui de la troisième une fonction linéaire de chacune des quantités a, b, c, et ainsi de suite. De plus, ces fonctions sont symétriques par rapport à ces lettres.

Remplaçons, dans les équations précédentes, a, b, c, etc., par $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{k}$, $\frac{c}{l}$, et multiplions-les, la première par h, la deuxième par hk, la troisième par hkl, etc., il viendra

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a + (a+h) + (a+2h) + \ldots + [a+(m-1)h] = a\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)^2 - \left(\frac{a}{h}\right)^2}{2},\\
&ab + (a+h)(b+k) + \ldots + [a+(m-1)h][b+(m-1)k].\\
&\qquad = (bh-ak+hk)\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)^2 - \left(\frac{a}{h}\right)^2}{2} + hk\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)^3 - \left(\frac{a}{h}\right)^3}{3},\\
&abc + (a+h)(b+k)(c+l) + \ldots\\
&\qquad + [a+(m-1)h][b+(m-1)k][c+(m-1)l]\\
&\qquad = \frac{(bh-ak+hk)(ch-al+hl)}{h}\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)^2 - \left(\frac{a}{h}\right)^2}{2}\\
&\qquad\quad + (bhl+chk-2akl+3hkl)\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)^3 - \left(\frac{a}{h}\right)^3}{3} + hkl\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)^4 - \left(\frac{a}{h}\right)^4}{4},\\
&\text{etc.,}
\end{aligned}
\right.
$$

formules plus générales que les équations (9).

3. Les formules (9) se simplifient dans le cas particulier où l'on a

$$b = a - 1, \quad c = b - 1, \quad d = c - 1, \quad \text{etc.}:$$

en effet, les équations (8) nous donnent, dans cette hypothèse,

$$\varphi_1 = \varphi', \quad \varphi_2 = \varphi'', \quad \varphi_3 = \varphi''', \quad \text{etc.},$$

et, par conséquent,

$$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+m-1) = \frac{(a+m)^2 - a^2}{2},$$

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} a(a-1) + (a-1)(a-2) + (a-2)(a-3) + \ldots \\ \quad + (a+m-1)(a+m-2) = \dfrac{(a+m)^3 - (a-1)^3}{3}, \\ a(a-1)(a-2) + (a-1)(a-2)(a-3) + (a-2)(a-3)(a-4) + \ldots \\ \quad + (a+m-1)(a+m-2)(a+m-3) = \dfrac{(a+m)^4 - a^4}{4}, \\ \quad \text{etc.}, \end{array}\right.$$

formules que l'on changera en d'autres plus générales en y remplaçant a par $\frac{a}{h}$ et multipliant la première par h, la deuxième par h^2, la troisième par h^3, etc.

4. Considérons maintenant un autre cas qui fait l'objet spécial de cet article, savoir celui où, dans les formules (9), on suppose

$$a = b = c = d = \ldots:$$

les équations (8) deviennent alors

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varphi_1 = \varphi', & \varphi_2 = \varphi'_1, \\ \varphi'_1 = \varphi' + \varphi'', & \varphi'_2 = \varphi'_1 + \varphi''_1, \\ \varphi''_1 = 2\varphi'' + \varphi''', & \varphi''_2 = 2\varphi''_1 + \varphi'''_1, \\ \varphi'''_1 = 3\varphi''' + \varphi^{\text{IV}}, & \varphi'''_2 = 3\varphi'''_1 + \varphi^{\text{IV}}_1, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(p)}_1 = p\varphi^{(p)} + \varphi^{(p+1)}, & \varphi^{(p)}_2 = p\varphi^{(p)}_1 + \varphi^{(p+1)}_1, \\ \quad \text{etc.}; & \quad \text{etc.} \end{array}\right.$$

A l'aide de ces équations, il est aisé d'exprimer φ_1, φ_2, φ_3, etc., en φ', φ'', φ''', etc., et l'on voit que, r étant un nombre entier quelconque, l'expression de φ_r sera de la forme

$$\varphi_r = \varphi' + A_r\varphi'' + B_r\varphi''' + C_r\varphi^{\text{IV}} + \ldots + L_r\varphi^{r}.$$

Pour obtenir plus promptement les coefficients A_r, B_r, etc., remarquons que, si dans une quelconque des équations (12), on vient à augmenter d'une unité les indices placés au bas de la lettre φ, on retombera sur une autre équation du même groupe; il est donc permis de faire ce changement dans toute équation déduite de celles-là, et, en particulier, dans l'équation

$$\varphi_r = \varphi' + A_r\varphi'' + B_r\varphi''' + C_r\varphi^{\text{IV}} + \ldots,$$

ce qui donne

$$\varphi_{r+1} = \varphi' + A_r\varphi''_1 + B_r\varphi'''_1 + C_r\varphi^{\text{IV}}_1 + \ldots,$$

ou bien, en remplaçant φ'_1, φ''_1, φ'''_1, etc., par leurs valeurs,

$$\begin{array}{lll} \varphi_{r+1} = \varphi' + 1 & \mid \varphi'' + A_r & \mid \varphi''' + B_r \quad \mid \varphi^{\text{IV}} + \ldots. \\ \qquad\qquad + 2A_r & \quad + 3B_r & \quad + 4C_r \end{array}$$

On voit par là que, connaissant les coefficients 1, A_r, B_r, etc., de φ', φ'', φ''', etc., dans l'expression de φ_r, si l'on écrit ces coefficients sur une même ligne horizontale, et au-dessous les mêmes coefficients multipliés respectivement par 1, 2, 3, etc., en ayant soin d'avancer chaque terme d'un rang, de manière à former le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccc} & 1, & A_r, & B_r, & C_r, & \ldots, \\ 1, & 2A_r, & 3B_r, & 4C_r, & 5D_r, & \ldots; \end{array}$$

si, enfin, on ajoute les termes contenus dans une même ligne verticale, les sommes ainsi obtenues seront les coefficients de φ', φ'', φ''', etc., dans φ_{r+1}. En appliquant cette règle, on peut former le tableau suivant :

$$\begin{array}{lcccccc}
\varphi_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & 1\varphi', & \\
 & & & & & 1 & \\
\varphi_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & 1\varphi' + 1\varphi'', & \\
 & & & & 1 & 2 & \\
\varphi_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 1\varphi' + 3\varphi'' + 1\varphi''', & & \\
 & & & 1 & 6 & 3 & \\
\varphi_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & 1\varphi' + 7\varphi'' + 6\varphi''' + 1\varphi^{\text{IV}}, & & & \\
 & & 1 & 14 & 18 & 4 & \\
\varphi_5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 1\varphi' + 15\varphi'' + 25\varphi''' + 10\varphi^{\text{IV}} + 1\varphi^{\text{V}}, & & & & \\
 & 1 & 30 & 75 & 40 & 5 & \\
\varphi_6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\varphi' + 31\varphi'' + 90\varphi''' + 65\varphi^{\text{IV}} + 15\varphi^{\text{V}} + 1\varphi^{\text{VI}}. & & & & & \\
\text{etc.} & & & & & &
\end{array}$$

5. Cherchons maintenant l'expression générale de φ_r; or, à cause de $A_4 = 0$ et de l'équation

$$A_{r+1} = 2A_r + 1,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
A_2 &= 1,\\
A_3 &= 2A_2 + 1,\\
A_4 &= 2A_3 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
A_{r-1} &= 2A_{r-2} + 1.\\
A_r &= 2A_{r-1} + 1.
\end{aligned}$$

Ajoutons ces équations, après avoir multiplié la première par 2^{r-2}, la deuxième par 2^{r-3}, la troisième par 2^{r-4},..., l'avant-dernière par 2; nous trouverons

$$A_r = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{r-3} + 2^{r-2} = \frac{2^{r-1} - 1}{1}.$$

De même, à cause de $B_2 = 0$ et de l'équation

$$B_{r+1} = 3B_r + A_r = 3B_r + 2^{r-1} - 1,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
B_3 &= 2^1 - 1,\\
B_4 &= 3B_3 + 2^2 - 1,\\
B_5 &= 3B_4 + 2^3 - 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
B_{r-1} &= 3B_{r-2} + 2^{r-3} - 1,\\
B_r &= 3B_{r-1} + 2^{r-2} - 1.
\end{aligned}$$

Ajoutons à ces équations, après avoir multiplié la première par 3^{r-3}, la deuxième par 3^{r-4},..., l'avant-dernière par 3, il viendra

$$\begin{aligned}
B_r &= 2^1 3^{r-3} + 2^2 3^{r-4} + \ldots + 2^{r-3} 3^1 + 2^{r-2} - 1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{r-3},\\
&= 2^{r-2}\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^{r-3}\right] - 1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{r-3}).
\end{aligned}$$

ou bien

$$B_r = \frac{3^{r-1} - 2.2^{r-1} + 1}{1.2}.$$

Nous déduirons de même de l'équation

$$C_{r-1} = 4C_r + B_r,$$

la formule

$$C_r = \frac{4^r - 3.3^r + 3.2^r - 1}{1.2.3}.$$

puis, de l'équation

$$D_{r-1} = 5D_r + C_r.$$

cette autre formule

$$D_r = \frac{5^{r-1} - 4.4^r + 6.3^{r-1} - 4.2^r + 1}{1.2.3.4}.$$

et ainsi de suite. On aperçoit aisément la loi de ces expresssions, et l'on en conclut qu'en posant

$$\varphi_r = \varphi' + A_r\varphi'' + B_r\varphi''' + \ldots + G_r\varphi^{p-1} + H_r\varphi^p + \ldots,$$

on aura

$$H_r = \frac{p^r - \frac{p-1}{1}(p-1)^r + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-2)^r - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}(p-3)^r + \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(p-1)}.$$

Pour s'assurer de l'exactitude de cette formule, il suffit de vérifier que, si elle a lieu pour une certaine valeur de r, elle aura lieu aussi pour la valeur $r+1$; or cela est facile à l'aide de l'équation

$$H_{r-1} = pH_r + G_r;$$

en effet, si l'on y remplace H_r par la valeur précédente, et G_r par

$$\frac{p^{r-1} - \frac{p-2}{1}(p-2)^{r-1} + \frac{(p-2)(p-3)}{1.2}(p-3)^{r-1} - \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(p-2)}.$$

on trouve

$$H_{r-1} = \frac{p^r - \frac{p-1}{1}(p-2)^r + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-3)^r - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}(p-4)^r - \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(p-1)}.$$

ce qui est la valeur écrite plus haut de H, où r est remplacé par $r+1$. On a donc généralement

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_r = {} & \varphi' + \frac{2^{r-1}-1}{1}\varphi'' + \frac{3^{r-1}-2.2^{r-1}+1}{1.2}\varphi''' + \frac{4^{r-1}-3.3^{r-1}+3.2^{r-1}-1}{1.2.3}\varphi^{\text{IV}} + \ldots \\ & + \frac{p^r - \frac{p-1}{1}(p-1)^{r-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-2)^{r-1} - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}(p-3)^{r-1} + \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(p-1)}\varphi^{p} + \ldots \\ & + \frac{r^{r-1} - \frac{r-1}{1}(r-1)^{r-1} + \frac{(r-1)(r-2)}{1.2}(r-2)^{r-1} - \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3}(r-3)^{r-1} + \ldots \pm 1}{1.2.3\ldots(r-1)}\varphi^{r}. \end{aligned}\right.$$

6. *Remarque.* On peut obtenir sous une autre forme la valeur de φ_r : d'abord on voit aisément, par les équations (12) ou par la règle pratique donnée plus haut, que le coefficient de $\varphi^{(r)}$, dans cette valeur, est l'unité. Posons donc

$$\varphi_r = \varphi^{r} + M_r\varphi^{r-1} + N_r\varphi^{r-2} + P_r\varphi^{r-3} + \ldots,$$

de sorte qu'on ait aussi

$$\varphi_{r+1} = \varphi^{r+1} + M_{r+1}\varphi^{r} + N_{r+1}\varphi^{r-1} + P_{r+1}\varphi^{r-2} + \ldots.$$

Nous conclurons, de la règle qui vient d'être rappelée,

$$M_{r+1} = M_r + r, \quad N_{r+1} = N_r + r - 1\, M_r, \quad P_{r+1} = P_r + r - 2\, N_r, \quad \text{etc.}$$

Or l'équation

$$M_{r+1} = M_r + r$$

nous donne, à cause de $M_1 = 0$,

$$\begin{aligned} M_2 &= 1, \\ M_3 &= M_2 + 2, \\ M_4 &= M_3 + 3. \\ &\ldots\ldots\ldots \\ M_r &= M_{r-1} + r - 1, \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$M_r = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Il en résulte

$$N_{r+1} = N_r + \frac{r(r-1)^2}{2}.$$

et par suite, à cause de $N_1 = 0$,

$$N_3 = \frac{2.1^2}{2},$$

$$N_4 = N_3 + \frac{3.2^2}{2},$$

$$N^5 = N_4 + \frac{4.3^2}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$N_r = N_{r-1} + \frac{(r-1)(r-2)^2}{2},$$

d'où, en ajoutant,

$$N_r = \frac{2.1^2 + 3.2^2 + 4.3^2 + \ldots + (r-1)(r-2)^2}{2}.$$

Le numérateur du second membre s'évaluera à l'aide de la troisième des formules (9), en y supposant

$$a = 2, \quad b = c = 1, \quad m = r = 2,$$

et l'on trouvera

$$N_r = \frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24};$$

on obtiendra de même la formule

$$P_r = \frac{r(r-1)(r-2)^2(r-3)^2}{48},$$

et ainsi de suite. Nous avons donc

$$\varphi_r = \varphi^r + \frac{r(r-1)}{2}\varphi^{r-1} + \frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24}\varphi^{r-2}$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)^2(r-3)^2}{48}\varphi^{r-3} + \ldots.$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (13) conduit aux relations suivantes :

$$r^{r-1} - \frac{r-1}{1}(r-1)^{r-1} + \frac{(r-1)(r-2)}{1.2}(r-2)^{r-1} - \ldots \pm 1 = 1.2\ldots(r-1),$$

$$(r-1)^{r-1} - \frac{r-2}{1}(r-2)^{r-1} + \frac{(r-2)(r-3)}{1.2}(r-3)^{r-1} - \ldots$$

$$\mp 1 = 1.2\ldots(r-2) \times \frac{r(r-1)}{2},$$

$$(r-2)^{r-1} - \frac{r-3}{1}(r-3)^{r-1} + \frac{(r-3)(r-4)}{1.2}(r-4)^{r-1} - \ldots$$

$$\pm 1 = 1.2\ldots(r-3) \times \frac{r(r-1)(r-2)(3r-5)}{24},$$

$$(r-3)^{r-1} - \frac{r-4}{1}(r-4)^{r-1} + \frac{(r-4)(r-5)}{1.2}(r-5)^{r-1} - \ldots$$

$$\mp 1 = 1.2\ldots(r-4) \times \frac{r(r-1)(r-2)^2(r-3)^2}{48},$$

etc.,

qui ont lieu pour les valeurs entières et positives de r.

7. Si maintenant, dans les équations (4), nous introduisons l'hypothèse

$$a = b = c = \ldots,$$

nous en conclurons, en ayant égard aux équations (13) et (7),

$$a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+m-1) = \frac{(a+m)^2 - a^2}{2},$$

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + \ldots + (a+m-1)^2 = \frac{(a+m)^3 - a^3}{2} - \frac{(a+m) - a}{3},$$

$$a^3 + (a+1)^3 + \ldots + (a+m-1)^3 = \frac{(a+m)^4 - (a)^4}{2} - \frac{(a+m)^2 - a^2}{4},$$

etc.,

et, généralement,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} & a^r + (a+1)^r + (a+2)^r + \ldots + (a+m-1)^r = \frac{(a+m)^{r+1} - a^{r+1}}{2} - \frac{r}{1} \cdot \frac{(a+m)^2 - a^2}{3} \\ & + \frac{3^{r-1} - 2.2^{r-1} + 1}{1.2} \cdot \frac{(a+m)^3 - (a)^3}{4} + \frac{4^{r-1} - 3.3^{r-1} + 3.2^{r-1} - 1}{1.2.3} \cdot \frac{(a+m)^4 - a^4}{5} \ldots \\ & p^{r-1} - \frac{p-1}{1}(p-1)^{r-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-2)^{r-1} - \ldots \pm 1 \\ & + \frac{\ldots}{1.2.3\ldots(p-1)} \cdot \frac{(a+m)^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} \ldots \\ & + \frac{(a+m)^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}. \end{aligned}\right.$$

Cette derniere équation est comprise elle-même dans une autre plus générale, qu'on obtiendra en remplaçant a par $\frac{a}{h}$ et multipliant les deux membres par h^r; on trouve ainsi

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&a^r + (a+h)^r + (a+2h)^r + \ldots + [a+(m-1)h]^r \\
&= h\left\{
\begin{aligned}
&h^{r-1}\left(\left(\frac{a}{h}+m\right)^r - \left(\frac{a}{h}\right)^r\right) + \frac{(2h)^{r-1} - h^{r-1}}{1}\cdot\left(\left(\frac{a}{h}+m\right)^r - \left(\frac{a}{h}\right)^r\right) + \ldots \\
&+ \frac{(ph)^{r-1} - \frac{p-1}{1}(ph-h)^{r-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(ph-2h)^{r-1} - \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}(ph-3h)^{r-1} + \ldots \pm h^{r-1}}{1.2.3\ldots(p-1)} \\
&\times \left(\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)^{p-1} - \left(\frac{a}{h}\right)^{p-1}}{p-1} + \ldots + h^{r-1}\frac{\left(\frac{a}{h}+m\right)^{r-1} - \left(\frac{a}{h}\right)^{r-1}}{r-1}\right)
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}
\right.
$$

Telle est la formule qui fait connaître la somme des puissances de degré r des termes d'une progression arithmétique.

FIN DU ONZIÈME VOLUME.

QA
1
J684
t.11

Journal de mathématiques
pures et appliquées

Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY